

Л. И. ФУФАЕВА

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

УЧЕБНИК

Допущено

*Экспертным советом по профессиональному образованию
в качестве учебника для использования в учебном процессе образовательных
учреждений, реализующих программы среднего профессионального образования*

5-е издание, стереотипное



Москва
Издательский центр «Академия»
2016

УДК 621.3(075.32)
ББК 31.2я73
Ф964

Рецензенты:

ведущий специалист ОАО «Московский металлургический завод
“Серп и молот”» *А. П. Филатов*;
зам. гл. конструктора Московского института электромеханики и автоматики
(МИЭА) *Е. А. Измайлов*

Фуфаева Л. И.

Ф964 Электротехника : учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / Л. И. Фуфаева. — 5-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2016. — 384 с.
ISBN 978-5-4468-8801-6

Учебник может быть использован при изучении общепрофессиональной дисциплины «Электротехника» в соответствии с ФГОС СПО для специальностей электротехнического профиля.

Рассмотрены физические процессы, связанные с электрическим и магнитными полями, и основные методы расчета электрических и магнитных полей, электрических и магнитных цепей постоянного и переменного токов, переходных процессов в электрических цепях постоянного и переменного токов. Приведены примеры расчета полей и цепей.

Для студентов учреждений среднего профессионального образования. Может быть полезен специалистам в области проектирования и эксплуатации электротехнических устройств.

УДК 621.3(075.32)
ББК 31.2я73

*Оригинал-макет данного издания является собственностью
Издательского центра «Академия», и его воспроизведение любым способом
без согласия правообладателя запрещается*

© Фуфаева Л. И., 2009
© Образовательно-издательский центр «Академия», 2013
ISBN 978-5-4468-8801-6 © Оформление. Издательский центр «Академия», 2013

ВВЕДЕНИЕ

Значение электрической энергии в жизни современного общества. Электричество, электрический заряд, электромагнитное поле, электрическая энергия, электромагнитные явления, электротехника, электрификация — эти и другие термины с корнем «электро» органически вошли в повседневную жизнь и трудовую деятельность абсолютного большинства людей.

Электрическая энергия широко используется в быту и технике. Человек любого возраста уверенно включает и выключает электрическое освещение, радиоприемники и телевизоры, регулирует громкость их звука и яркость изображения, нажимает кнопку электрического звонка, пользуется телефоном и лифтом. Функционирование космических кораблей, искусственных спутников Земли; работа металлургических гигантов; плавание атомных ледоколов; обработка деталей на станках; работа автоматических линий по сборке радиоаппаратуры, электромашин, автомобилей; обслуживание агропромышленных комплексов; производство, ремонт и эксплуатация разнообразной техники — все это и огромное число других научных, промышленных и сельскохозяйственных работ и процессов невозможны без использования электрической энергии.

Электротехника — отрасль науки и техники, связанная с изучением электрических и магнитных явлений и их применением для преобразования и использования электрической энергии в практической деятельности человека.

Свойства электрической энергии. Огромное значение электрической энергии в жизни современного общества определяется ее ценными свойствами:

- большим разнообразием и относительной дешевизной способов и технических средств получения электрической энергии;
- удобством передачи электрической энергии на большие расстояния и распределения ее между потребителями при малых потерях;
- сравнительной простотой и высоким коэффициентом полезного действия (КПД) преобразования электрической энергии в другие виды энергии (механическую, тепловую, световую, химическую и т.д.);
- наличием сравнительно простых, надежных и безопасных методов измерения и контроля электрических величин, а также управления режимами работы электротехнических устройств, агрегатов и систем;

- исключительно широкими возможностями представления, передачи, хранения и преобразования информации на основе использования электрической энергии.

Производство электрической энергии. В настоящее время для производства электроэнергии используются мощные тепловые, атомные и гидроэлектростанции, использующие энергию, накопленную в природе (энергию падающей воды, угля, торфа, атомную энергию и т.д.). Для питания автономных объектов (автомобилей, самолетов, космических кораблей, метеостанций и т.д.) используются разнообразные устройства для преобразования других видов энергии (химической, солнечной и др.) в электрическую.

Два направления применения электрической энергии. Разнообразие областей применения электрической энергии поистине необозримо. Сейчас в электротехнике выделяют два основных направления применения электрической энергии. *Первое направление* рассматривает задачи производства, передачи, потребления и преобразования электроэнергии, необходимой для развития всех отраслей народного хозяйства. *Второе направление* изучает вопросы передачи и преобразования информации при помощи электрических сигналов. Задачи передачи и обработки информации решаются в автоматике, телеуправлении и телеизмерении, вычислительной технике, радиотехнике и электронике.

Модели, используемые для описания процессов в электротехнических устройствах. В настоящее время для анализа электромагнитных явлений и процессов в технических устройствах используются две основные модели: *электрические цепи* и *электромагнитное поле*. Соответственно этим двум моделям курс электротехники также условно подразделяют на две части: *теория электрических и магнитных цепей* и *теория электромагнитного поля*.

Отрасли науки и техники, использующие знания электротехники. Предмет «Электротехника» опирается на курсы физики и математики. Он включает в себя изучение принципов устройства и работы приборов, машин, аппаратов, использующих электромагнитную энергию, соотношений между электрическими и магнитными величинами, методов расчета и анализа электромагнитных процессов.

Из фундаментальной электротехники развились в достаточно самостоятельные отрасли науки и техники: радиотехника, телевидение, электроника, автоматика, электронная вычислительная техника и т.д.

Эти отрасли науки и техники наряду со своими информационно-специфическими методами и моделями в полной мере опираются на теоретические основы электротехники: фундамент знаний, представлений и методов качественного и количественного анализа электромагнитных явлений и электромагнитных процессов во всех устройствах, где они имеют место.

Глава 1

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

1.1. Электричество и электрический заряд

Электризация. Взаимодействие зарядов. Знание электричества берет начало в древней Греции. Легенда приписывает Фалесу Милетскому (около 640—546 до н.э.) открытие следующего явления: янтарь, натертый куском ткани, притягивает легкие предметы, например соломинки. Это наблюдение стало началом науки об электричестве. Само слово *электричество* греческого происхождения и означает «янтарь». Силы, обретенные янтарем от трения, получили название *электрических сил*. Уильям Гильберт (1544—1603), проводя аналогичные опыты с предметами из разных материалов, обнаружил, что сургуч, натертый мехом, или стекло, натертое шелком, так же, как и янтарь, обретают способность притягивать легкие частицы, т.е. обладают электрическими силами. Опыт показал, что посредством трения можно зарядить всякое тело.

Наблюдаемое явление получило название *электризации*. Тела, которые действуют на окружающие предметы электрическими силами, называли *наэлектризованными*, или *заряженными*, т.е. получившими некий *электрический заряд*.

Оказывается, что при электризации заряжаются оба тела.

При удалении друг от друга натираемые предметы приобретают независимые заряды.

Заряженные тела взаимодействуют друг с другом. *При этом заряды различаются по качеству: одни из них при соприкосновении притягиваются друг к другу, другие отталкиваются.* Например, заряженное стекло отталкивается от другого заряженного предмета из стекла и притягивается к заряженному сургучу.

Наблюдения показали, что несмотря на обилие различных существующих в природе веществ часть из них действует как заряженное стекло (т.е. они отталкиваются от зарядов стекла и притягиваются к зарядам сургуча), а остальные — как заряженный сургуч (т.е. они притягиваются к зарядам стекла и отталкиваются от зарядов сургуча).

Это наводило на мысль о существовании всего двух родов электричества, двух родов электрических зарядов. Заряды стекла и сургуча могут компенсировать друг друга, поэтому условились приписывать электрическим зарядам знак, разделяя заряды на

положительные и *отрицательные**, подобно величинам, которые при сложении уменьшают друг друга.

Было принято, что при натирании стекла о шелк, стеклу сообщается положительный электрический заряд, а шелку отрицательный. Таким образом, *положительно заряженными* называются тела, которые действуют на другие заряженные предметы так же, как стекло, наэлектризованное трением о шелк. *Отрицательно заряженными* называются тела, которые действуют так же, как сургуч, наэлектризованный трением о шерсть.

В соответствии с введенными понятиями взаимодействие заряженных тел можно описать так: *одноименно заряженные тела отталкиваются друг от друга, разноименные — притягиваются.*

Вся совокупность явлений, в которых обнаруживается существование, движение и взаимодействие заряженных частиц, объединена в понятие «электричество».

Электронная теория. В XX в. физики открыли, что *носителями электричества* являются крохотные частицы вещества — самые малые из известных нам в природе материальных тел. Они были названы *электронами***. Мы не можем видеть электроны, как не видим и более крупные частицы материи, называемые *атомами*, в состав которых входят электроны. Однако косвенные данные, подтверждающие существование электронов, вполне убедительны. Опыты показали, что отрицательно заряженное тело (т. е. тело, обладающее свойствами шелка, потертого о стеклянную палочку), содержит избыток электронов (отсюда *заряд электрона считают отрицательным*), а у положительно заряженного тела электронов не хватает. По-видимому при натирании стекла шелком какое-то количество электронов уходит из стекла, притягиваясь к атомам шелка.

Теория, объясняющая различные электрические свойства тел присутствием в них электронов и их движением, носит название

* Выбор названий «положительный» и «отрицательный» для зарядов совершенно случаен. Их ввел американский физик Бенджамин Франклин (1706—1790). Мы могли бы вместо этого употреблять названия: *A* и *B*, но арифметические понятия «плюс» и «минус» удачно напоминают, что речь идет здесь о «противоположных» электрических зарядах, которые могут нейтрализовать друг друга точно так же, как положительные и отрицательные числа, например: $+7$ и -7 при сложении дают в сумме нуль.

** Электрический заряд мельчайшей частицы вещества — электрона — составляет $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл (кулон — единица измерения заряда), т. е. один кулон составляет суммарный электрический заряд $6,3 \cdot 10^{18}$ электронов.

«Быть может, эти электроны — миры, где пять материков,
Искусства, знания, войны, троны и память сорока веков!
Еще, быть может, каждый атом — Вселенная, где сто планет;
Там — все, что здесь, в объеме сжатом, но также то, чего здесь нет».

В. Брюсов

электронной теории. Эта теория просто и наглядно объясняет многие электрические явления, например электризацию трением.

Основной причиной явления, которое называется *электризацией трением*, является тот факт, что при тесном контакте двух различных тел часть электронов переходит с одного тела на другое. В результате этого на поверхности первого тела оказывается положительный заряд (недостаток электронов), а на поверхности второго тела — отрицательный заряд (избыток электронов).

Но электризация трением не является единственным способом отделения электронов от положительных ионов. Предмет заряжается не только при контакте с заряженным телом, но и в том случае, когда оно находится на некотором расстоянии т. е. через влияние. Явление заряжения через влияние получило название электрической индукции. Заряды, полученные посредством *электрической индукции*, называются *наведенными*, или *индуцированными*.

С точки зрения электронной теории эти явления легко объясняются существованием в материале заряжаемого тела *свободных электронов*.

При поднесении к предмету положительного заряда электроны притягиваются к нему и накапливаются на ближнем конце предмета. На нем оказывается определенное количество «избыточных» электронов — появляется отрицательный заряд. На удаленном конце образуется недостаток электронов и соответственно избыток положительных ионов — положительный заряд. Отметим, что при этом не наблюдается заметного перемещения самих взаимодействующих тел, если они не являются достаточно «легкими».

При поднесении к предмету отрицательного заряда электроны накапливаются на удаленном конце, а на ближнем конце получается избыток положительных ионов. После удаления заряда, вызывающего перемещение электронов, они вновь распределяются по проводнику, так что все участки его оказываются по-прежнему незаряженными.

Понятие об электрическом поле. О существовании зарядов в заряженных телах можно судить по их воздействию на окружающие предметы некими электрическими силами. Чтобы отразить факт существования этого воздействия, было введено понятие электрического поля*.

Электрическое поле — одна из двух составляющих электромагнитного поля. Это особое состояние среды, характеризующееся воздействием на электрически заряженную частицу с силой, про-

* Понятие, которое теперь принято называть полем, ввел Уильям Томпсон (лорд Кельвин, 1824—1907).

порциональной заряду частицы и не зависящей от ее скорости. Электрическое поле является одной из форм материи*. Оно существует в пространстве, окружающем заряженные тела.

Электрическое поле и заряд — два вида материи, неразрывно связанные друг с другом.

Закон Кулона. Основной характеристикой электрического поля является *электрическая сила*.

До сих пор мы рассматривали *качественную* сторону электрических явлений.

Для более глубокого понимания электрических явлений необходимо рассмотреть *количественную* сторону, т. е. выяснить, от чего зависит величина электрической силы.

Взаимодействие заряженных тел зависит от их формы. Чтобы исключить влияние формы тела и установить общие закономерности сил, действующих на заряды в электрическом поле, рассматривают так называемые точечные заряды.

Точечными зарядами называются такие заряженные тела, размеры которых много меньше расстояния между ними.

В 1785 г. французский физик Шарль Кулон (1736—1806) установил закон взаимодействия двух точечных зарядов, названный в его честь законом Кулона.

Два заряда, q_1 и q_2 , притягиваются или отталкиваются в зависимости от того, разноименные они (т. е. один положительный, а другой отрицательный) или одноименные (оба положительны или оба отрицательны). Ш. Кулон установил, что сила притяжения (или отталкивания) F , действующая между зарядами, определяется по формуле

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

где r — расстояние между двумя зарядами q_1 и q_2 ; k — постоянная величина. Значение k зависит от единиц, в которых измеряются заряд, расстояние, сила, и от среды, в которой находятся заряды.

Закон Кулона формулируется следующим образом: *сила взаимодействия F двух точечных зарядов пропорциональна произведению величин зарядов q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними.*

Выведенная Ш. Кулоном формула обладает одной замечательной особенностью: по виду она идентична закону всемирного тяготения (закону тяготения Ньютона). Однако в законе Кулона (см. формулу (1.1)) сила электрического взаимодействия может быть

* Материя — объективная реальность, данная нам в ощущении, существующая вне и независимо от человеческого сознания.

как силой притяжения, так и силой отталкивания, в то время как сила тяготения всегда является силой притяжения.

Единица измерения заряда. Чтобы определить, чему равно значение k , прежде всего надо определиться, в каких единицах измерять заряд. Для этого определенное количество электричества (электрического заряда) надо принять за эталон, подобно тому как некоторое количество вещества было выбрано за единицу массы, и сравнивать с этим эталоном количество электричества в исследуемых телах. Поскольку оказалось, что сила, с которой одно заряженное тело действует на другое, зависит от количества электричества, то по определенному значению силы взаимодействия заряженных частиц можно установить меру электричества — меру заряда. Одной из общепринятых единиц измерения электрического заряда является *кулон* (Кл), названный так в честь Шарля Кулона.

1 кулон — это заряд на каждом из взаимодействующих тел ($q_1 = q_2$), находящихся на расстоянии $r = 0,01$ м, создающий силу взаимодействия зарядов $F = 9 \cdot 10^{13}$ Н.

Влияние среды на силу взаимодействия зарядов. Сила взаимодействия зарядов зависит от среды, в которой они находятся. Эту зависимость учитывает *абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества* ϵ_a , которая выражается в виде произведения безразмерной величины, называемой *относительной диэлектрической проницаемостью вещества* ϵ , и *электрической постоянной* ϵ_0 — *диэлектрической проницаемости вакуума*:

$$\epsilon_a = \epsilon \epsilon_0. \quad (1.2)$$

Безразмерная величина ϵ показывает, во сколько раз сила взаимодействия зарядов в данном веществе меньше силы взаимодействия тех же зарядов в вакууме (подробнее см. подразд. 1.4).

Электрическая постоянная ϵ_0 измеряется в фарадах*, поделенных на метр, Ф/м:

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}.$$

В системе единиц СИ** с учетом влияния среды коэффициент k в формуле (1.1):

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_a}. \quad (1.3)$$

* Фарад (Ф) — единица измерения емкости.

** Здесь и в дальнейшем для измерения всех физических величин используется Международная система единиц (СИ, или SI — *system international*). В ней приняты единицы измерения: длины — метр (м); массы — килограмм (кг); времени — секунда (с). Для электротехнических величин: электрический заряд измеряется в кулонах (Кл); сила — в ньютонах (Н); сила электрического тока — в амперах (А); электрическое напряжение — в вольтах (В); энергия — в джоулях (Дж).

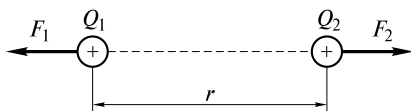


Рис. 1.1. Силы взаимодействия двух одноименных зарядов

Закон Кулона при этом принимает вид

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_a r^2}. \quad (1.4)$$

Таким образом, в формуле (1.4) сила F выражается в ньютонах (Н), заряд q — кулонах (Кл), расстояние r — в метрах (м), ϵ_a — в Ф/м.

Графическое изображение силы взаимодействия зарядов. Электрическая сила, действующая на заряд, изображается вектором, направленным в сторону действия силы и приложенным к центру заряда.

Векторы сил взаимодействия двух зарядов расположены на прямой, соединяющей центры взаимодействующих зарядов (рис. 1.1).

Силы взаимодействия двух зарядов (пара сил) равны между собой:

$$F_1 = F_2.$$

В случае взаимодействия нескольких произвольно расположенных зарядов сила, действующая на каждый заряд системы, есть результат геометрического сложения сил взаимодействия соответствующих пар зарядов (рис. 1.2).

Пример 1.1. Два точечных неподвижных положительных заряда $Q_1 = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл и $Q_2 = 4,5 \cdot 10^{-7}$ Кл находятся в воздухе на некотором расстоянии друг от друга (см. рис. 1.1). На заряд Q_1 действует сила $F_1 = 0,1$ Н. Определить расстояние, на котором находятся заряды Q_1 и Q_2 друг от друга.

Решение. Заряженные тела взаимодействуют между собой. На каждый из зарядов Q_1 и Q_2 со стороны их общего электрического поля действует сила, равная силе взаимодействия F , т.е. $F_1 = F_2 = F$. Силы F_1 и F_2 приложены к соответствующим зарядам и действуют в противоположные стороны, так как одноименно заряженные тела отталкиваются друг от друга.

Из формулы (1.4), учитывая формулу (1.2) и равенство сил взаимодействия $F = F_1 = F_2$, получаем выражение для расчета расстояния

$$r = \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 F_1}}.$$

Так как воздух практически не ослабляет электрического поля системы и сила взаимодействия практически та же, что в вакууме, принято считать, что для воздуха относительная диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 1$.

Подставляя в выражение для r численные значения входящих в него величин, находим

$$r = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 4,5 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot 1 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1}} = 0,0932 \text{ м} = 9,32 \text{ см.}$$

Пример 1.2. Определить силу, которую испытывает каждое из трех точечных заряженных тел со стороны созданного ими электрического поля, если заряд тел одинаков $Q = 8 \cdot 10^{-7}$ Кл и заряды расположены в вакууме на расстоянии 20 см друг от друга (рис. 1.2).

Решение. Сила, действующая на каждое заряженное тело системы, есть результат геометрического сложения соответствующей пары сил.

Например, сила F_1 , действующая на Q_1 , — результат геометрического сложения равных между собой сил F_{12} и F_{13} . Заряды находятся в вершинах равностороннего треугольника, так как расстояние между ними одинаковое. Таким образом, угол между векторами сил F_{12} и F_{13} равен 60° , а между F_{13} и F_1 равен 30° . Опустим перпендикуляр из конца вектора силы F_{13} на вектор силы F_1 . Оче-

видно, что $\frac{1}{2} F_1 = F_{13} \cos 30^\circ$. Из этого выражения, учитывая формулы (1.2) и (1.4) и значение относительной диэлектрической проницаемости вакуума $\epsilon = 1$, имеем

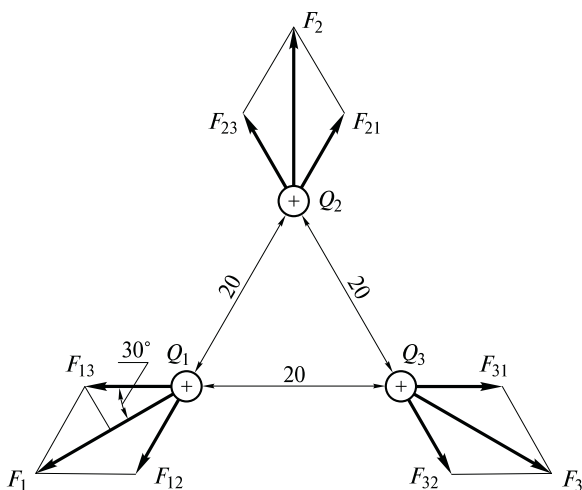


Рис. 1.2. Силы взаимодействия трех зарядов

$$F = F_1 = F_2 = F_3 = \frac{Q_1 Q_3 \sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

После подстановки в последнее выражение численных значений соответствующих величин получим

$$F = \frac{8^2 \cdot 10^{-14} \sqrt{3}}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2^2} = 0,249 \text{ Н.}$$

1.2. Основные характеристики электрического поля

Электрическое поле неподвижных заряженных тел характеризуют три величины: напряженность, напряжение и потенциал. Рассмотрим отдельно каждую из них.

Напряженность электрического поля. Как известно, электрическое поле существует вокруг заряженного тела и проявляется в силовом воздействии на электрически заряженные тела или заряженные частицы, вносимые в это поле. Если в выбранную точку пространства, окружающего исследуемое заряженное тело, помещать разные по величине заряды, то значение силы в данной точке будет разное. Этот факт соответствует закону Кулона (см. формулу (1.1)), согласно которому значение измеряемой силы F характеризует результат взаимодействия электрических полей двух зарядов (исследуемого Q и вносимого q) и зависит от их значений.

Однако значение отношения F/q для каждой точки исследуемого поля не зависит от величины вносимого заряда и является величиной постоянной. Это отношение и служит для оценки интенсивности исследуемого электрического поля заряженного тела. Итак, можно сделать следующий вывод.

Отношение силы F к величине вносимого в исследуемое поле заряда q является одной из важнейших характеристик электрического поля, называемой напряженностью электрического поля ξ .

Для определения напряженности электрического поля заряженного тела в исследуемую точку поля вносят *положительный пробный заряд*.

Пробный заряд — это заряд пробного тела, линейные размеры и заряд которого настолько малы, что не влияют на интенсивность и конфигурацию исследуемого поля.

Таким образом, напряженность ξ численно равна отношению силы F , с которой поле исследуемого заряженного тела действует на пробный заряд, к его величине q :

$$\xi = \frac{F}{q}. \quad (1.5)$$

Другими словами, интенсивность (напряженность) электрического поля в данной точке удобно оценивать силой, приходящейся на единицу положительного заряда пробного тела, помещенного в исследуемую точку.

Единица измерения напряженности электрического поля:

$$[\xi]^* = \frac{\text{Н (ньютон)}}{\text{К (кулон)}}.$$

Эта единица напряженности электрического поля специального названия не имеет.

С учетом формулы (1.1) напряженность электрического поля уединенного точечного заряженного тела с зарядом Q

$$\xi = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}. \quad (1.6)$$

Напряженность электрического поля — величина векторная.

Направление напряженности совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд, мысленно помещенный в данную точку исследуемого поля.

Для наглядности электрическое поле изображают графически с помощью так называемых *линий напряженности*, или *электрических силовых линий*.

Электрические силовые линии проводятся таким образом, чтобы напряженность в каждой точке силовой линии была направлена по касательной к ней.

На рис. 1.3, а...г показаны электрические силовые линии точечных зарядов и векторы напряженности поля ξ в некоторой точке А.

Если во всех точках электрического поля векторы напряженности равны между собой и одинаково направлены, поле называется *однородным (равномерным)*, в противном случае — *неоднородным*.

Примером однородного поля является электрическое поле между двумя параллельными разноименно заряженными пластинами (рис. 1.3, д) в области, достаточно удаленной от краев пластин.

Линии напряженности электрического поля неподвижных зарядов начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных зарядах. Таким образом, силовые линии электрического поля не замкнуты (см. рис. 1.3).

Электрическое поле неподвижных зарядов называется *электростатическим*.

* Здесь и далее прямоугольные скобки указывают размерность величины, заключенной в скобки.

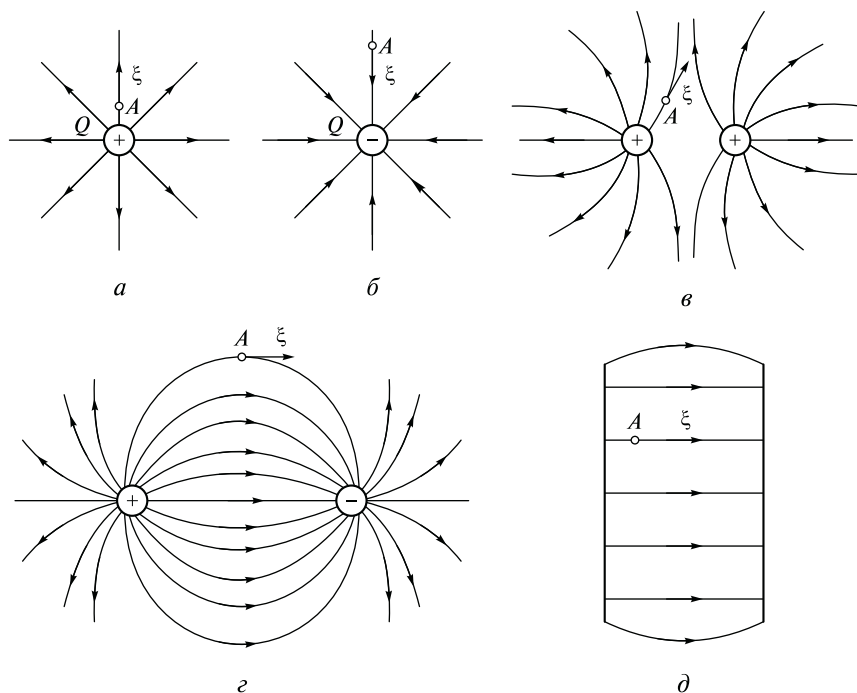


Рис. 1.3. Линии напряженности электрического поля:

a — положительного заряда; *б* — отрицательного заряда; *в* — двух одноименных зарядов; *г* — двух разноименных зарядов; *д* — двух разноименно заряженных пластин

Электрическое напряжение. Рассмотрим свободную заряженную частицу в однородном электрическом поле (рис. 1.4).

Эта частица будет перемещаться по направлению действующей на нее силы F . При этом сила F совершает работу A .

Работа считается положительной, если заряженная частица перемещается по направлению сил поля, и отрицательной, когда движение совершается под действием сторонних сил против направления сил поля. Предположим, что частица движется по замкнутому пути $1-2-3-4-1$, причем на участке $1-2-3$ она движется под действием сил поля, а на участке $3-4-1$ — против сил поля. Оба пути имеют произвольную конфигурацию. Общее значение работы A по замкнутому пути $1-2-3-4-1$ должно быть равно нулю: $A_{1-2-3} + A_{3-4-1} = 0$. Невыполнение этого условия означает, что имеется замкнутый путь, вдоль которого работа положительна, т. е. имеется возможность, не пополняя энергию электрического поля, получать положительную работу. Такой возможности нет, это противоречит закону сохранения энергии. Таким образом, $A_{1-2-3} = A_{3-4-1}$.

Это означает, что работа по перемещению заряженной частицы не зависит от конфигурации пути перемещения, а определяется положением начальной (1) и конечной (3) точек пути, т. е. расстоянием l между указанными точками.

Отсюда следует, что работа A , совершаемая силами поля за счет энергии поля,

$$A = Fl. \quad (1.7)$$

С учетом формулы (1.5)

$$A = \xi ql. \quad (1.8)$$

Из формулы (1.8) следует, что работа A зависит и от напряженности исследуемого поля, и от величины перемещаемого заряда, т. е. является характеристикой результирующего поля обоих полей: исследуемого и поля перемещаемого заряда.

Чтобы исключить влияние поля перемещаемого заряда, введем характеристику, равную отношению A/q . Поскольку это отношение не зависит от величины помещенного в исследуемое поле заряда, то оно характеризует только исследуемое поле. Эта характеристика называется *электрическим напряжением* U .

Таким образом, напряжение между двумя точками электрического поля численно равно работе сил поля по перемещению между этими точками положительного единичного заряда:

$$U = \frac{A}{q}. \quad (1.9)$$

Единица электрического напряжения:

$$[U] = \frac{[A]}{[q]} = \frac{\text{Дж (джоуль)}}{\text{Кл (кулон)}} = \text{В (вольт)}.$$

Применяются также единицы, производные от вольта:

1 кВ (киловольт) = $1 \cdot 10^3$ В;

1 мВ (милливольт) = $1 \cdot 10^{-3}$ В; 1 мкВ (микровольт) = $1 \cdot 10^{-6}$ В.

Из выражения (1.9) с учетом формулы (1.8) получаем

$$U = \xi l, \quad (1.10)$$

откуда

$$\xi = \frac{U}{l}. \quad (1.11)$$

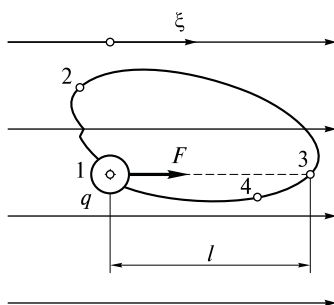


Рис. 1.4. Заряженная частица в однородном электрическом поле

Выражения (1.10) и (1.11) отражают связь между двумя основными характеристиками поля: напряженностью и напряжением.

Из формулы (1.11) следует, что единица измерения напряженности электрического поля

$$[\xi] = \frac{[U]}{[l]} = \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Электрический потенциал. Электрическое поле в каждой своей точке обладает определенным запасом потенциальной энергии W , т.е. способностью совершать работу. Совершенная работа A при перемещении заряда из одной точки поля в другую численно равна изменению запаса потенциальной энергии поля. Например, для поля, изображенного на рис. 1.4, работа A по перемещению заряда из точки 1 в точку 3

$$A = A_{1-3} = W_1 - W_3. \quad (1.12)$$

Разделив обе части равенства (1.12) на величину заряда q , получим выражение

$$\frac{A}{q} = \frac{W_1}{q} - \frac{W_3}{q}. \quad (1.13)$$

Потенциальная энергия, отнесенная к численному значению заряда, находящегося в какой-либо точке электрического поля, называется *потенциалом* φ этой точки поля.

Таким образом, потенциалы электрического поля в точках 1 и 3 (см. рис. 1.4) соответственно:

$$\varphi_1 = W_1/q; \quad \varphi_3 = W_3/q.$$

В общем случае в какой-либо произвольной точке N потенциал электрического поля

$$\varphi_N = \frac{W_N}{q}. \quad (1.14)$$

Потенциал — это важнейшая характеристика электрического поля наряду с напряженностью и напряжением.

Потенциал — энергетическая характеристика поля, которая определяет потенциальную энергию (запас энергии) в данной точке поля, приходящуюся на единицу внесенного в точку поля заряда.

В отличие от напряженности, являющейся векторной величиной, потенциал — *величина скалярная*.

Из формулы (1.13) с учетом формул (1.9) и (1.14) получаем

$$U_{1-3} = \varphi_1 - \varphi_3, \quad (1.15)$$

т. е. напряжение между двумя точками электрического поля равно разности потенциалов этих точек.

Практический интерес, как правило, представляют не сами потенциалы точек, а их разность, т. е. напряжение между двумя точками поля.

Согласно формуле (1.15) с учетом формулы (1.10) получаем

$$\varphi_1 - \varphi_3 = \xi l, \quad (1.16)$$

где l — расстояние между точками 1 и 3 поля.

Потенциал любой точки электрического поля может быть вычислен из формулы (1.15):

$$\varphi_1 = U_{1-3} + \varphi_3, \text{ а } \varphi_3 = \varphi_1 - U_{1-3}.$$

Если потенциал одной из точек принимать за уровень отсчета и для удобства считать его равным нулю, то потенциал другой, произвольно выбранной точки поля по абсолютной величине будет равен напряжению между выбранными точками поля.

По отношению к выбранному уровню отсчета потенциал может иметь положительное, отрицательное или нулевое значения.

Часто нулевым считают потенциал земной поверхности (земли), а численные значения потенциалов точек поля определяют относительно потенциала земли.

В соответствии с формулой (1.15) потенциал измеряется в вольтах, т. е. в тех же единицах, что и напряжение.

Потенциал электрического поля изменяется от точки к точке. Вместе с тем в поле можно выделить ряд точек, имеющих одинаковый потенциал.

Геометрическое место точек, имеющих одинаковый потенциал, называется *эквипотенциальной (равнопотенциальной) поверхностью*.

Например, эквипотенциальные поверхности однородного поля — плоскости, перпендикулярные к линиям напряженности; эквипотенциальные поверхности точечного заряженного тела — сферические поверхности, центр которых совпадает с центром тела, что следует из формул (1.6) и (1.16).

Вектор напряженности и, следовательно, электрические силовые линии всегда перпендикулярны эквипотенциальной поверхности.

1.3. Расчет электростатических полей

В подразд. 1.1 и 1.2 рассматривались электрические поля, образованные точечными зарядами или заряженными телами, разме-

ры которых относительно невелики по сравнению с расстоянием между этими телами. Основной закон, используемый для расчета электрических полей точечных зарядов, — закон Кулона.

Однако в электротехнике гораздо чаще приходится иметь дело с заряженными телами больших размеров: обкладки конденсаторов, линии и кабели электропередач, электроды электронных ламп и электронно-лучевых трубок, корпуса электрооборудования, электростатические экраны и т. д.

Заряды таких заряженных тел обычно распределены по поверхности тел. Такие заряженные тела принято характеризовать *поверхностной плотностью заряда* σ или *линейной плотностью* τ :

$$\sigma = \frac{dQ}{dS}; \tau = \frac{dQ}{dl}, \quad (1.17)$$

где Q — заряд поверхности заряженного тела площадью S или длиной l .

Для расчета электростатических полей заряженных тел с распределенными зарядами широко используется теорема Остроградского — Гаусса. Она применяется для определения напряженности электрического поля в различных точках пространства вокруг заряженного тела по известной величине заряда тела, с которым это поле связано.

Теорема Остроградского — Гаусса устанавливает связь между потоком вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность и величиной заряда заряженных тел, создающих это поле.

Поток вектора напряженности электрического поля (рис. 1.5). Напряженность электрического поля ξ является «точечной» характеристикой поля. При этом из формулы (1.6) следует, что интенсивность электрического поля одиночного заряда уменьшается по мере удаления от заряда.

Для характеристики суммарной интенсивности поля в определенной области пространства, содержащей заряженные тела, используется интегральная величина — поток вектора напряженности N через замкнутую поверхность, ограничивающую эту область,

$$N = \oint_S \xi_n dS, \quad (1.18)$$

где dS — элементарная площадка замкнутой поверхности; ξ_n — нормальная составляющая вектора напряженности в точке расположения элементарной площадки, $\xi_n = \xi \cos \alpha$ (α — угол между напряженностью поля ξ и перпендикуляром к элементарной площадке dS).

Единица измерения потока вектора напряженности:

$$[N] = [\xi] \cdot [S] = (\text{В/м}) \text{ м}^2 = \text{В} \cdot \text{м}.$$

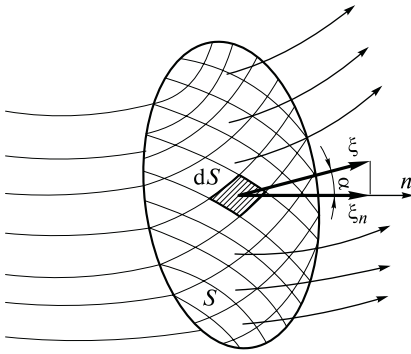


Рис. 1.5. Поток вектора напряженности электрического поля:

dS — элементарная площадка замкнутой поверхности; n — нормаль к площадке dS

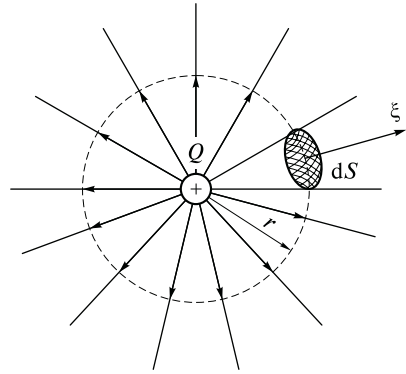


Рис. 1.6. Поток вектора напряженности заряженного точечного тела

Теорема Остроградского — Гаусса. Рассмотрим поток вектора напряженности поля точечного заряда Q через сферическую (шаровую) замкнутую поверхность с радиусом r . Если поместить заряд Q в центр этой сферы (рис. 1.6), то в любой точке этой сферы напряженность поля ξ будет одинакова и перпендикулярна поверхности сферы и согласно формуле (1.6)

$$\xi_n = \xi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r^2}.$$

Поток вектора напряженности поля через замкнутую сферу

$$N = \oint_S \xi_n dS = \xi_n \oint_S dS = \xi_n S. \tag{1.19}$$

Так как площадь замкнутой сферы с радиусом r равна $S = 4\pi r^2$, то

$$N = \xi_n S = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r^2} 4\pi r^2,$$

или

$$N = \frac{Q}{\epsilon_a}. \tag{1.20}$$

Из выражения (1.20) следует, что полученное для частного случая сферической поверхности значение потока не зависит ни

от формы, ни от размеров поверхности, ни от места расположения заряда внутри нее.

Учитывая полученный результат, можно положить, что соотношение (1.20) останется справедливым и для замкнутой поверхности любой формы, охватывающей заряженное тело или n заряженных тел, произвольно расположенных внутри нее, алгебраическая сумма зарядов (с учетом знака в случае разноименных зарядов):

$$Q = \sum_{\text{алг}} Q_k,$$

где k — число зарядов, $1 \leq k \leq n$.

Таким образом, поток вектора напряженности поля через замкнутую поверхность

$$N = \frac{1}{\epsilon_a} \sum_{\text{алг}} Q_k. \quad (1.21)$$

Соотношение (1.21) называют теоремой Остроградского—Гаусса: *поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность равен отношению суммы зарядов, расположенных внутри этой поверхности, к абсолютной диэлектрической проницаемости среды.*

Теорема Остроградского—Гаусса широко используется для расчета электростатических полей.

Для упрощения анализа электрических полей заряженных тел принимается допущение, что заряд распределен по поверхности равномерно, т.е. поверхностная плотность σ или линейная плотность τ одинаковы в любой точке поверхности заряженного тела. Это допущение обычно выполняется на практике с большой степенью точности. В таком случае из формулы (1.17) следует, что заряд, распределенный по поверхности:

$$Q = \oint_S \sigma dS = \sigma \oint_S dS = \sigma S; \quad (1.22)$$

$$Q = \oint_S \tau dl = \tau \oint_S dl = \tau l. \quad (1.23)$$

Рассмотрим расчет напряженности электрического поля на примере симметричных полей.

Поле заряженного шара. Выведем формулу расчета напряженности электрического поля заряженного шара радиусом R при равномерном распределении заряда по его поверхности.

Из центра заряженного шара, имеющего радиус R , проведем сферу с радиусом r , окружающую шар (рис. 1.7, а). Эта сфера с

площадью $S = 4\pi r^2$ является эквипотенциальной поверхностью (см. подразд. 1.2). Сферическая симметрия поля вытекает из сферической симметрии заряженного тела. В этом случае поток вектора напряженности поля через сферу радиуса r в соответствии с формулой (1.19):

$$N = \xi S = \xi 4\pi r^2, \quad (1.24)$$

где ξ — напряженность поля шара во всех точках на поверхности сферы радиусом r .

Согласно теореме Остроградского — Гаусса (см. формулу (1.21)):

$$N = \frac{1}{\epsilon_a} \sum_{\text{алл}} Q_k.$$

При условии равномерного распределения заряда по поверхности шара согласно формуле (1.22) его заряд

$$\sum_{\text{алл}} Q_k = \sigma S = 4\pi R^2 \sigma. \quad (1.25)$$

Совмещая выражения (1.24), (1.21) и (1.25), определим искомую напряженность

$$\xi = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_a r^2}. \quad (1.26)$$

Из сопоставления выражений (1.6) и (1.26) видно, что при $r > R$ заряженный шар создает такое же поле, как и точечный заряд, помещенный в центр шара и имеющий заряд $Q = 4\pi R^2 \sigma$.

На рис. 1.7, б представлен график зависимости напряженности ξ от расстояния r при удалении от поверхности шара.

Поле прямого заряженного провода. При равномерном распределении заряда вдоль провода с известной линейной плотностью τ выведем формулу расчета напряженности создаваемого проводом электростатического поля.

Проведем через некоторую точку пространства цилиндрическую поверхность, ось которой совпадает с осью провода круго-

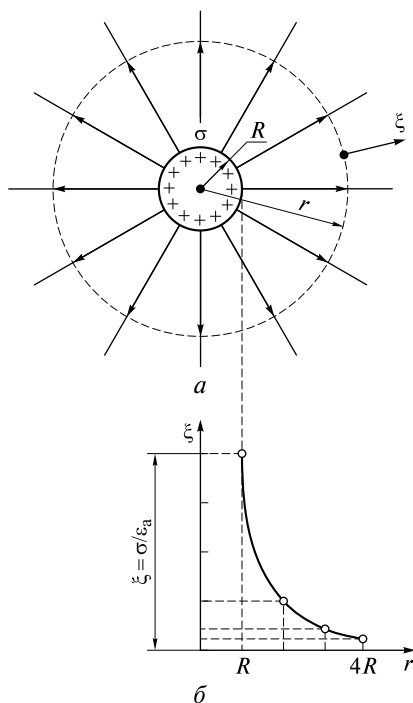


Рис. 1.7. Электрическое поле заряженного шара:

a — силовые линии поля заряженного шара; b — изменение напряженности поля при удалении от поверхности шара

вого сечения, торцы перпендикулярны оси провода, основание имеет радиус r , а боковая линия — длину l (рис. 1.8, *a*).

Поток через основания цилиндра равен нулю, так как линии напряженности не пронизывают их. Таким образом, суммарный поток вектора напряженности равен потоку вектора напряженности через боковую поверхность цилиндра.

Вследствие симметрии во всех точках боковой поверхности цилиндра напряженность поля ξ одинакова. Поэтому поток вектора напряженности через боковую поверхность цилиндра ($S = 2\pi rl$)

$$N = \xi 2\pi rl.$$

Согласно теореме Остроградского — Гаусса

$$N = Q/\epsilon_a.$$

Приравнявая правые части выражений для потока, получим

$$\xi 2\pi rl = Q/\epsilon_a.$$

Так как в соответствии с формулой (1.17) поверхностный заряд $Q = \tau l$, то

$$\xi = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a lr} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r}. \quad (1.27)$$

На рис. 1.8, *б* представлен график изменения напряженности ξ от расстояния r при удалении от поверхности провода.

Однородное электрическое поле. Однородное поле — это поле, в каждой точке которого напряженность имеет одинаковое значение и направление (см. подразд. 1.2). Такое поле с достаточной степенью точности можно получить вокруг бесконечной плоской равномерно заряженной с одинаковой плотностью заряда проводящей (металлической) пластины при условии однородности окружающей среды. Кроме того, однородное поле образуется между двумя бесконечными равномерно и разноименно заряженными плоскими проводящими пластинами.

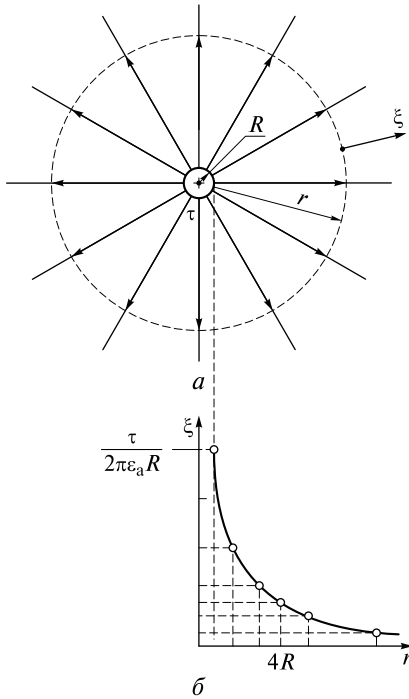


Рис. 1.8. Электрическое поле прямого заряженного провода:

a — силовые линии поля заряженного провода; *б* — изменение напряженности поля при удалении от поверхности провода

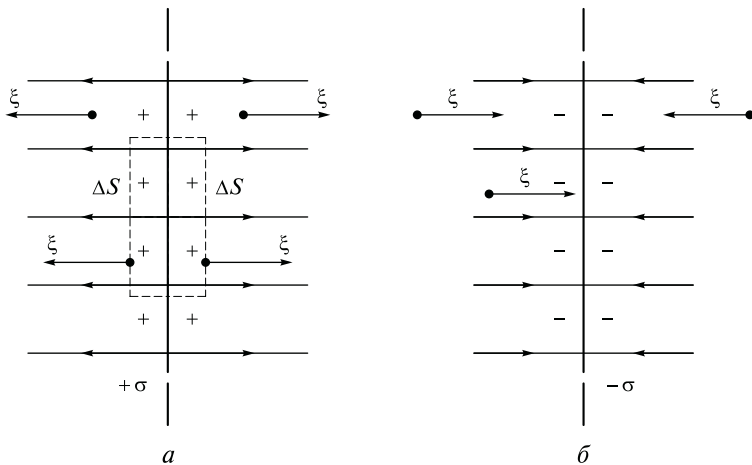


Рис. 1.9. Электрическое поле пластины:

a — положительно заряженной; *б* — отрицательно заряженной

Поле заряженной пластины. Выведем формулу расчета напряженности электростатического поля вокруг заряженной пластины при условии, что заряд распределяется по ее поверхности равномерно и известна поверхностная плотность заряда σ .

Электрические линии поля вокруг заряженной пластины приведены на рис. 1.9. Эти линии перпендикулярны к поверхности пластины, иначе наблюдалось бы перемещение заряженных частиц (ток) вдоль проводящей пластины под действием тангенциальной составляющей напряженности поля.

Выделим вокруг части пластины замкнутую поверхность, образованную двумя плоскими поверхностями ΔS (параллельными заряженной плоскости и находящимися на некотором расстоянии от нее) и цилиндрической боковой поверхностью, перпендикулярной к ней.

Векторы напряженности поля заряженных пластин, как уже отмечалось, перпендикулярны пластине и поэтому пронизывают только поверхности ΔS . Поток вектора напряженности через цилиндрическую поверхность равен нулю, и, следовательно, общий поток равен потоку через две поверхности ΔS .

Согласно формуле (1.6) все точки поверхностей ΔS имеют одинаковое значение напряженности ξ . Дело в том, что из-за параллельности поверхности ΔS одинаково удалены от пластины, и один и тот же суммарный заряд Q пластин создает поле в каждой точке поверхностей ΔS . В таком случае поток вектора напряженности N определяется по формуле (1.19):

$$N = \xi_n S = \xi S,$$

где S — площадь замкнутой поверхности.

В данном случае $S = 2\Delta S$ и $N = \xi S = \xi \cdot 2\Delta S$.

Заряд, заключенный внутри выделенной поверхности, в соответствии с формулой (1.22):

$$Q = \sigma \Delta S.$$

Согласно теореме Остроградского — Гаусса

$$\xi \cdot 2\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_a}.$$

Отсюда

$$\xi = \frac{\sigma}{2\epsilon_a}. \quad (1.28)$$

Как видно из формулы (1.28), напряженность поля бесконечной плоскости не связана с расстоянием от нее.

При равномерной плотности заряда и однородном диэлектрике, окружающем заряженную плоскую пластину, напряженность созданного пластиной электрического поля одинакова в любой точке поля. Поле плоской пластины является однородным.

Необходимо знать, что выведенная формула (1.28) справедлива в достаточной степени лишь для центральной части заряженной пластины и на относительно небольшом расстоянии от нее, так как была выведена при условии перпендикулярности линий напряженности к заряженной пластине.

Для относительно небольших пластин необходимо учитывать «искажение» поля: деформацию линий напряженности на торцах пластины (так называемый «краевой эффект») и на достаточно большом удалении от нее. Однако в большинстве практических случаев, когда расстояние от пластины много меньше линейных размеров пластины, условно можно считать, что заряженная пластина имеет неограниченные размеры. В этом случае полученное соотношение не приводит к принципиальному, существенному искажению реально существующего распределения поля.

Поле двух параллельных пластин. Выведем формулу расчета напряженности электростатического поля снаружи и внутри двух заряженных пластин при условии равномерного распределения заряда по их поверхностям и известной поверхностной плотности заряда σ .

Электрическое поле двух параллельных бесконечных плоскостей, несущих разноименные заряды одинаковой плотности (рис. 1.10, а), определяется наложением полей положительной и отрицательной пластин.

Согласно формуле (1.28) напряженность полей каждой из пластин не зависит от расстояния от пластины — она одинакова во

всех точках пространства, окружающего пластины. Поэтому в наружной части пространства во всех его точках (слева от пластины А и справа от пластины Б, см. рис. 1.10, а) напряженности обеих разноименно заряженных пластин (ξ_A и ξ_B) взаимно скомпенсированы, и результирующая напряженность их равна нулю:

$$\xi_{рез} = \xi_A - \xi_B = 0.$$

В пространстве между пластинами поля обеих пластин складываются. Результирующая напряженность в каждой точке пространства равна сумме двух одинаковых значений напряженностей, ξ_A и ξ_B , т.е. одинакова.

Из этого следует, что, во-первых, в пространстве между двумя заряженными пластинами электростатическое поле однородно. Во-вторых, результирующая напряженность поля в 2 раза больше, чем напряженность от одной заряженной пластины. Таким образом, с учетом формулы (1.28) напряженность поля в пространстве между пластинами:

$$\xi = \xi_A + \xi_B = 2 \frac{\sigma}{2\epsilon_a}; \xi = \frac{\sigma}{\epsilon_a}. \tag{1.29}$$

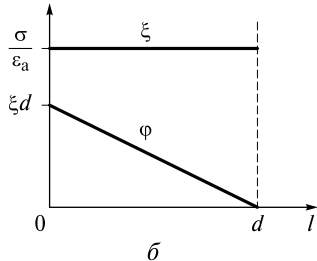
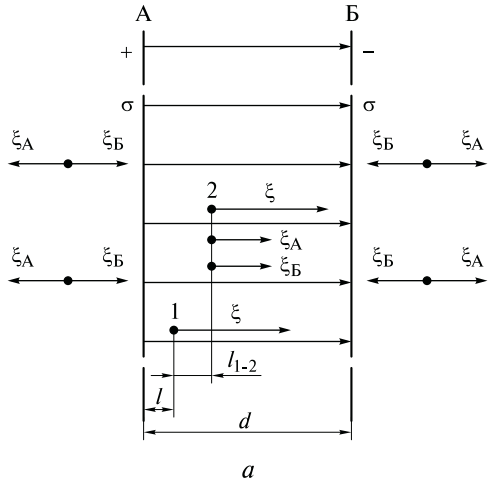


Рис. 1.10. Электрическое поле двух разноименно заряженных пластин:

а — векторы напряженности;
б — зависимости напряженности ξ и потенциала ϕ от расстояния l

Допущение о равномерности (однородности) поля между пластинами с одинаковой поверхностной плотностью выполняется с достаточной степенью точности в технических устройствах, у которых расстояние между пластинами много меньше линейных размеров этих пластин.

Напряжение между любыми двумя точками пространства связано с напряженностью простым соотношением (1.11).

Например, напряжение между точками 1 и 2 (см. рис. 1.10, а)

$$U_{1-2} = \xi l_{1-2} = \sigma l_{1-2} / \epsilon_a.$$

Напряжение между пластинами А и Б (см. рис. 1.10, а)

$$U_{AB} = \xi d = \frac{\sigma}{\epsilon_a} d. \quad (1.30)$$

На рис. 1.10, б представлены графики изменения напряженности ξ и потенциала φ по мере удаления от положительно заряженной пластины. Напряженность поля ξ одинакова на любом расстоянии (от 0 до d) от положительно заряженной пластины.

Самый высокий потенциал имеет положительно заряженная пластина А (см. рис. 1.10, а). Если принять потенциал пластины Б равным нулю, то из формулы (1.16) получим

$$\varphi_A = \varphi_B + \xi d = \xi d.$$

По мере приближения точек к пластине Б (по мере увеличения l) потенциал уменьшается по линейному закону (см. рис. 1.10, б):

$$\varphi = \xi (d - l).$$

1.4. Вещество в электрическом поле

Вещества (материалы) подразделяются на *проводники*, *диэлектрики* (*изоляторы*) и *полупроводники* по способности проводить не изменяющийся во времени электрический ток под действием не изменяющегося во времени электрического поля, т.е. по *электропроводности* (см. подразд. 2.3).

Проводниковые материалы. Хорошими проводниками являются металлы и их сплавы. В металлах свободные электроны перемещаются между атомами, переходя из сферы действия одного ядра в сферу действия другого, заполняя пространство между ними наподобие газа. Отсюда возник термин «электронный газ». Представление о свободных электронах подтверждается тем, что раскаленные металлы испускают электроны в окружающую среду. Свободные электроны отличаются большой подвижностью и находятся в состоянии беспорядочного (теплового) движения в отличие от положительно заряженных ионов металла, составляющих

остов проводника, обладающих весьма малой подвижностью и совершающих лишь небольшие колебания около своего среднего положения. Такие проводники называются *проводниками первого рода*. В них перемещение электронов не сопровождается изменением химической природы проводников и заметным переносом вещества.

К *проводникам второго рода* относятся водные растворы кислот, щелочей и солей и расплавы последних. В таких проводниках под действием растворителя молекулы вещества распадаются на ионы. Подобно электронам в металлах ионы могут перемещаться по всему объему проводника. Наличием положительных и отрицательных ионов объясняется электропроводность проводников второго рода.

Изоляционные материалы. Изоляторы подразделяются на газообразные, жидкие, твердые и твердеющие диэлектрики.

Газообразные диэлектрики. Наиболее распространенным газообразным диэлектриком является воздух. Он изолирует провода воздушных линий электропередач, открытые токоведущие части электроустановок и т.д. В качестве газообразных диэлектриков используют также водород, азот, инертные газы и др.

Жидкие диэлектрики. К ним относятся электроизолирующие масла и синтетические жидкие диэлектрики. Наиболее широкое применение в электротехнике находят нефтяные масла: трансформаторное и конденсаторное. Из синтетических жидких диэлектриков наибольшее применение имеет совол.

Твердые диэлектрики. К ним относятся диэлектрики на основе волоконистых органических материалов (различные виды электроизолирующих бумаг, текстильные материалы, лакоткани); природные минеральные материалы (слюда, асбест, мрамор); пластмассы (гетинакс и др.); эластомеры (резина, эбонит); стекла; керамические материалы (фарфор и др.).

Твердеющие диэлектрики. К ним относятся смолы; электроизолирующие лаки и компаунды.

Смолы бывают природные (шеллак и канифоль) и синтетические (полиэтилен, полистирол, поливинилхлорид, эпоксидные смолы и др.).

Компаунды — это смеси смол, воскообразных веществ и битумов с различными добавками.

Полупроводниковые материалы. К полупроводникам относятся: кремний, селен, германий, оксид меди), а также полупроводниковые соединения (арсенид галлия, карбид кремния, сульфид кадмия и др.).

Проводники в электрическом поле. Строение вещества определяет его свойства. Так строение проводника определяет его поведение в электрическом поле.

Электростатическая индукция. Если проводник (например, металлическую пластину) поместить в электрическое поле с напряженностью ξ (рис. 1.11, *a*), то под действием сил поля свободные электроны металлической пластины начнут перемещаться в направлении, противоположном направлению электрических линий. При этом на одной поверхности пластины возникнет отрицательный заряд, на другой, из-за недостатка электронов, — равный ему положительный заряд, т.е. происходит разделение зарядов. В результате разделения зарядов в проводящей пластине создается внутреннее электрическое поле с напряженностью $\xi_{\text{вн}}$, направленной навстречу внешнему полю.

По мере нарастания зарядов на поверхностях пластины усиливается и созданное зарядами внутреннее электрическое поле. Результирующее поле внутри пластины $\xi_{\text{рез}}$, равное разности ξ и $\xi_{\text{вн}}$, при этом ослабевает, т.е. уменьшается сила, действующая на свободные электроны и вызывающая их перераспределение. Поскольку зарядов в проводнике бесконечно много, то внутреннее поле способно скомпенсировать практически любое внешнее. Когда наступает равновесие напряженностей внешнего и внутреннего электрических полей $\xi = \xi_{\text{вн}}$, разделение зарядов прекращается. Процесс разделения зарядов происходит практически мгновенно. В результате разделения зарядов напряженность результирующего поля внутри пластины $\xi_{\text{рез}}$ оказывается равной нулю: $\xi_{\text{рез}} = \xi - \xi_{\text{вн}} = 0$.

Явление разделения электрических зарядов в проводящем теле под действием внешнего электростатического поля называется *электростатической индукцией*.

Электростатическое экранирование. Если в электрическое поле ξ поместить не сплошную металлическую пластину, а металлическую замкнутую оболочку (с полостью внутри), то и в этом случае заряженные частицы будут только на поверхности оболочки (рис. 1.11, *б*).

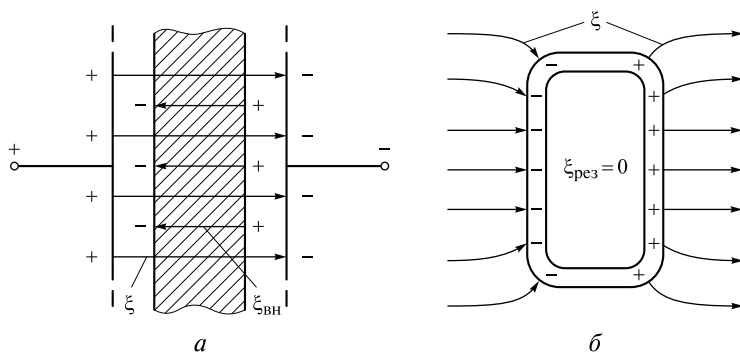


Рис. 1.11. Проводники в электрическом поле:

a — металлическая пластина; *б* — электростатический экран

Внутри металла и внутри полости электрическое поле отсутствует: $\xi_{\text{рез}} = \xi - \xi_{\text{вн}} = 0$.

Это свойство проводников используется для *электростатического экранирования*, т. е. для создания экранов, защищающих различные электротехнические устройства от действия внешних электростатических полей. Экран представляет собой замкнутую металлическую оболочку, окружающую защищаемое устройство, например электроизмерительные приборы.

В технике для экранирования вместо сплошных металлических оболочек обычно применяют более легкие металлические сетки. Например, при экранировании проводов используется достаточно густая металлическая сетка — «оплетка». Именно так устроены кабели питания электротехнических устройств, например обычный телевизионный кабель.

Неравномерное распределение зарядов по поверхности проводника. Процесс разделения электрических зарядов в проводнике под действием внешнего электрического поля имеет некоторую особенность — неравномерное распределение зарядов по поверхности проводника. Наибольшая плотность зарядов наблюдается вблизи острых выступов. Это приводит к чрезмерному увеличению напряженности электрического поля в окружающем пространстве и может вызвать пробой окружающего диэлектрика, например воздуха. При этом происходит разряд, так называемое «коронирование». Явление короны можно наблюдать на поверхности проводов высоковольтных линий электропередач. Чтобы избежать коронирования, всем металлическим частям электротехнических устройств, заряжаемым до высоких потенциалов, придают закругленные формы, а их поверхности делают гладкими.

Диэлектрики в электрическом поле. По сравнению с проводниками диэлектрики отличаются достаточно жесткими связями электронов с ядрами атомов и практическим отсутствием свободных электронов.

Газообразные, жидкие и аморфные диэлектрики состоят из молекул, имеющих в равных количествах положительные и отрицательные заряды. Такие диэлектрики бывают *неполярными* (с неполярными молекулами) и *полярными* (с полярными молекулами).

В кристаллических диэлектриках нельзя выделить отдельные молекулы, так как они представляют собой пространственные кристаллические решетки с правильным чередованием положительных и отрицательных ионов.

Поляризация неполярных диэлектриков. При отсутствии внешнего поля у группы диэлектриков, называемых неполярными, электрические центры электронов в атомах расположены симметрично относительно ядер, так как ядра их атомов находятся в центре электронных орбит (рис. 1.12, а). Положительные и отрицательные заряды атомов, составляющих молекулы, уравнов-

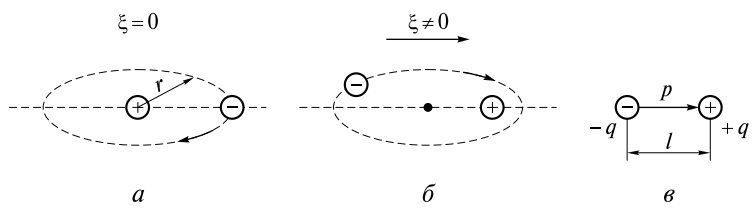


Рис. 1.12. неполярная молекула:

a — при отсутствии внешнего поля; *б* — при наличии внешнего поля; *в* — диполь

вешивают друг друга. Молекулы их являются электрически нейтральными или неполярными, собственное поле молекул отсутствует. К таким диэлектрикам относятся инертные газы, водород, азот.

Под действием внешнего поля у таких диэлектриков происходит смещение электронных орбит навстречу направлению внешнего поля (вектору напряженности ξ) (рис. 1.12, б).

Такая молекула во внешнем поле может рассматриваться как *диполь* — пара разноименных точечных зарядов ($+q$ и $-q$), находящихся друг от друга на небольшом расстоянии l , называемом *плечом диполя*. Заряды, образующие диполи диэлектрика, называют *связанными*, а произведение заряда q и плеча l — *электрическим моментом диполя* $p = ql$. Электрический момент p рассматривают как векторную величину, направленную от отрицательного заряда диполя к положительному заряду (рис. 1.12, в).

Таким образом, неполярные молекулы во внешнем поле становятся диполями. При этом каждый диполь образует свое электрическое поле с *напряженностью поляризации* $\xi_{п}$.

Со стороны внешнего поля на положительные заряды диполей действуют силы, направление которых совпадает с направлением напряженности внешнего поля ξ , а на отрицательные заряды — силы, направленные в противоположную сторону. Эти силы создают момент, поворачивающий диполь таким образом, что вектора электрических моментов p стремятся расположиться в направлении внешнего поля ξ (рис. 1.13). Описанное явление называется *поляризацией диэлектрика*.

При исчезновении внешнего поля смещение исчезает и молекулы снова становятся электрически нейтральными.

Рассмотренная поляризация называется *деформационной*.

Рис. 1.13. Поляризованный неполярный диэлектрик

Поляризация полярных диэлектриков. У другой группы диэлектриков, называемых *полярными*, молекулы изначально (независимо от внешних воздействий) имеют полярное строение: электрические центры электронов в молекулах расположены несимметрично относительно ядер. Полярную молекулу можно считать *диполем* с зарядами $+q$ и $-q$ и электрическим моментом $p = ql$.

При отсутствии внешнего поля все диполи беспорядочно повернуты (рис. 1.14, *а*), и суммарный электрический момент диэлектрика равен нулю, так что в целом диэлектрик нейтрален. При появлении внешнего поля его силы стремятся ориентировать диполи в направлении поля. В результате диполи в определенной степени поворачиваются и ориентируются в направлении поля (рис. 1.14, *б*). Такая поляризация называется *ориентационной*.

Поляризация кристаллов. Кристаллические диэлектрики состоят из ионов, которые связаны кристаллической решеткой и не могут свободно перемещаться. Поляризация кристаллов сводится к смещению всех положительных ионов по направлению силовых линий поля и отрицательных — в противоположном направлении.

Таким образом, *диэлектриком* можно назвать вещество, основным электрическим свойством которого является способность поляризоваться в электрическом поле.

У диэлектрика, находящегося в периодически изменяющемся внешнем электрическом поле, смещение связанных зарядов также будет периодическим, что вызывает *нагревание диэлектрика*. Чем с большей частотой изменяется внешнее поле, тем сильнее нагрев диэлектрика. Это явление применяется для нагрева и сушки влажных материалов, для получения или ускорения химических реакций, требующих повышенной температуры.

Мощность, расходуемая на нагрев диэлектрика при периодическом смещении зарядов диэлектрика, называется *диэлектрическими потерями*.

Ослабление электрического поля диэлектриком. В результате поворота дипольных молекул или ионов (у кристаллического диэлектрика) и ориентации их в направлении поля соседние заряды внутри диэлектрика взаимно компенсируются. Однако на крайних поверхностях диэлектрика образуются нескомпенсированные заряды. Они создают свое поле, напряженность которого ξ_d направлена в сторону, противоположную напряженности внешнего поля. Таким образом, напряженность результирующего поля $\xi_{рез} = \xi - \xi_d$.

Поляризация диэлектрика ослабляет поле, но не компенсирует его полностью, так как количество нескомпенсированных зарядов на поверхности диэлектрика ограничено.

Степень ослабления поля оценивается *относительной диэлектрической проницаемостью* ϵ , которая показывает, во сколько раз

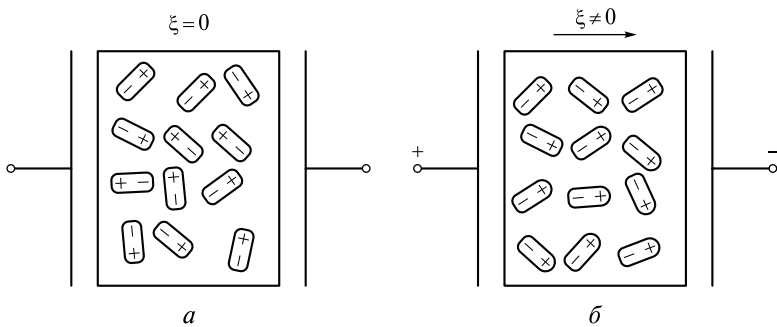


Рис. 1.14. Полярные молекулы диэлектрика:

a — при отсутствии внешнего поля; *б* — при наличии внешнего поля

внешнее поле ξ ослабляется в диэлектрике за счет поляризации диэлектрика. Таким образом, $\epsilon = \xi/\xi_{\text{рез}}$.

Чем сильнее поляризуется диэлектрик (чем больше $\xi_{\text{д}}$), тем слабее результирующее поле $\xi_{\text{рез}}$, а следовательно, тем больше его относительная диэлектрическая проницаемость ϵ .

Пробой диэлектрика. Диэлектрики являются неотъемлемой частью многих электротехнических устройств. Например, в конденсаторах они разделяют проводящие поверхности. Они разделяют электроды в вакуумных и газонаполненных лампах, в свечах зажигания двигателей внутреннего сгорания, контакты реле и всевозможных переключателей. Они изолируют проводники, например: в бытовой электропроводке, многожильных кабелях и т.д.

Когда между элементами конструкции электротехнических устройств (пластинами конденсаторов, электродами, проводниками и т.п.) имеется напряжение (разность потенциалов), то диэлектрик подвергается воздействию электрического поля, в котором он находится. Он поляризуется. Поляризации сопутствует нагрев диэлектрика.

Постепенное увеличение электрического поля приводит к увеличению степени поляризации диэлектрика. Однако при некотором значении напряженности электрического поля начинается резкое, скачкообразное изменение диэлектрических свойств вещества: электропроводность диэлектрика лавинообразно нарастает, и наступает явление, называемое *пробоем диэлектрика*.

Минимальное значение напряженности поля, при котором наступает пробой диэлектрика, называется *напряженностью пробоя* $\xi_{\text{пр}}$. Напряженность пробоя $\xi_{\text{пр}}$ характеризует *электрическую прочность диэлектрика*. Напряженность пробоя $\xi_{\text{пр}}$ измеряется в кВ/см или кВ/мм.

Например, воздух «пробивается» (теряет свойства изолятора, становясь проводником) при напряженности поля $\xi_{\text{пр}} = 3$ кВ/мм.

Напряжение пробоя $U_{\text{пр}}$ называется *пробивным*.

Напряженность $\xi_{\text{пр}}$ и напряжение $U_{\text{пр}}$ связаны простым соотношением, аналогичным (1.11):

$$\xi_{\text{пр}} = U_{\text{пр}}/h, \quad (1.31)$$

где h — толщина диэлектрика в месте пробоя.

Запас электрической прочности диэлектрика $k_{\text{пр}}$ характеризуется отношением напряженности пробоя $\xi_{\text{пр}}$ к номинальному значению напряженности $\xi_{\text{ном}}$:

$$k_{\text{пр}} = \frac{\xi_{\text{пр}}}{\xi_{\text{ном}}}. \quad (1.32)$$

Пробой диэлектрика обычно приводит к повреждению электроустановок. Чтобы не допустить пробоя, напряжение, при котором работают диэлектрики в электроустановках $U_{\text{ном}}$, должно быть не выше допустимого $U_{\text{доп}}$, которое принимается в несколько раз ниже пробивного $U_{\text{пр}}$. Следует также учитывать, что пробивное напряжение существенно зависит от многих факторов: неравномерности внешнего электрического поля, неравномерного распределения зарядов по поверхности проводника, скорости его изменения, температуры, влажности, давления и других факторов. При повышении температуры и влажности пробивное напряжение снижается особенно заметно.

Полупроводники в электрическом поле. Известно, что к полупроводникам относится большое число веществ и элементов, которые по своим электрическим свойствам занимают промежуточное положение между проводниками и диэлектриками.

Кристаллическое строение полупроводников. Для полупроводников характерно кристаллическое строение, т. е. закономерное и упорядоченное расположение их атомов в пространстве. В кристаллах связанные между собой атомы располагаются строго определенным образом и на одинаковых расстояниях друг от друга, в результате чего образуется своеобразная решетка из атомов, которую принято называть *кристаллической решеткой* твердого тела.

Между атомами кристаллической решетки существуют связи, образованные валентными электронами, которые взаимодействуют не только с ядром своего атома, но и соседними. В кристаллах германия связь между двумя соседними атомами осуществляется двумя валентными электронами (по одному от каждого атома). Такая связь между атомами называется *ковалентной*.

Под действием внешних факторов (например, электрического поля) некоторые валентные электроны атомов кристаллической решетки приобретают энергию, достаточную для освобождения от ковалентных связей. Благодаря этому в кристалле появляются *избыточные свободные электроны*.

При освобождении электрона из ковалентной связи в ней возникает как бы свободное место, обладающее элементарным положительным зарядом, равным по абсолютной величине заряду электрона. Такое освободившееся в электронной связи место условно назвали *дыркой*. Так как дырка обладает положительным зарядом, то она имеет возможность присоединить к себе электрон соседней заполненной ковалентной связи. В результате этого восстанавливается одна связь и разрушается соседняя, или, другими словами, заполняется одна дырка и одновременно с этим возникает новая в другом месте. Этот процесс непрерывно повторяется, и дырка, переходя из одной связи к другой, перемещается по кристаллу, что равносильно перемещению частицы, имеющей положительный заряд, равный по величине заряду электрона.

Влияние электрического поля на электропроводность полупроводников. Если внешнее электрическое поле отсутствует, то и электроны, и дырки вследствие теплового движения перемещаются в кристалле хаотически.

Если же на кристалл действует электрическое поле, то движение дырок и электронов становится упорядоченным, т.е. в кристалле возникает электрический ток — направленное движение заряженных частиц.

Таким образом, *электропроводность полупроводника обусловлена перемещением свободных электронов и дырок*. В первом случае носители зарядов отрицательны (негативны), во втором положительны (позитивны). Соответственно различают два вида электропроводности полупроводников: *электронную*, или *проводимость типа n* , и *дырочную*, или *проводимость типа p* .

1.5. Электрическая емкость проводников. Конденсатор

Емкость проводника. *Емкость проводника* — это одно из его важнейших физических свойств, характеризующее способность проводников накапливать электрический заряд.

Рассмотрим *уединенный проводник* (проводник, вблизи которого нет других тел, влияющих на распределение зарядов в нем) при условии, что потенциалы точек, бесконечно удаленных от данного проводника, можно принять равными нулю. Сообщим проводнику заряд Q . Сообщенный заряд равномерно распределяется по объему проводника и создает вокруг него электрическое поле. Это поле обладает определенным запасом потенциальной энергии $W_{\text{э}}$, характеризующейся потенциалом ϕ , численное значение которого пропорционально значению заряда Q . При этом поверхность проводника эквипотенциальна, т.е. является поверхностью, все точки которой имеют одинаковый потенциал ϕ .

При увеличении или уменьшении заряда Q совершается работа и соответственно изменяется потенциал проводника ϕ .

Однако если сравнить изменение потенциала $\Delta\phi$ у двух уединенных проводников при равном изменении их заряда ΔQ , то изменение потенциала может быть не одинаковым. Оказывается, что на изменение потенциала помимо заряда влияют форма и размеры поверхности проводника, а также среда, в которой находится проводник. Для выражения этого влияния введено понятие *электрической емкости*.

Таким образом, *электрическая емкость уединенного проводника C — это величина, характеризующая связь потенциала и заряда*, численно равная отношению заряда проводника к его потенциалу, при условии, что потенциалы бесконечно удаленных от данного проводника точек приняты равными нулю:

$$C = \frac{Q}{\phi}. \quad (1.33)$$

В пустоте для данного проводника емкость — величина постоянная, не зависящая от численного значения заряда. Это означает, что при увеличении заряда Q потенциал ϕ пропорционально увеличивается с коэффициентом пропорциональности, равным C .

Во многих используемых в технических устройствах и приборах диэлектриках в широком диапазоне изменения заряда емкость проводника также остается постоянной.

В системе единиц СИ за единицу емкости принята емкость такого проводника, увеличение заряда которого на 1 Кл (кулон) приводит к повышению его потенциала на 1 В (вольт). Эта единица носит название *фарад* (Φ):

$$[C] = \text{Кл/В} = \Phi.$$

Фарад — очень крупная единица емкости, поэтому на практике применяются более мелкие единицы: микрофарады, мкФ, и пикофарады, пФ. Связь единиц:

$$1\Phi = 1 \cdot 10^6 \text{ мк}\Phi = 1 \cdot 10^{12} \text{ п}\Phi.$$

Емкость конденсатора. Если вблизи заряженного проводника поместить другой заряженный проводник, то заряд и потенциал каждого из проводников изменится. В системе заряженных проводников на заряд и потенциал каждого проводника, помимо величин зарядов других проводников, влияет еще форма, размеры поверхностей других проводников и их расположение. Для выражения этого влияния введено понятие *электрической емкости системы проводников*.

Наибольший интерес для практики представляет система из двух проводящих пластин, которым можно сообщить равные по величине и противоположные по знаку заряды. Такое устройство обладает интересными свойствами. Во-первых, оно может концентрировать электрическое поле в ограниченном объеме пространства — между пластинами. Снаружи пластин поле практически отсутствует (см. подразд. 1.3). Во-вторых, оно обладает способностью накапливать и удерживать заряды на пластинах и соответственно энергию электрического поля между пластинами. Указанное устройство называется *конденсатором* (конденсация — накопление).

Простейший плоский конденсатор представлен на рис. 1.15, *а*. Он состоит из двух параллельных металлических пластин *1* и *3*, называемых *обкладками*, между которыми находится диэлектрик. Обе пластины имеют выводы (А и Б), обеспечивающие возможность подсоединения конденсатора в электрическую цепь.

Диэлектрик *2* изолирует металлические пластины друг от друга, увеличивает жесткость конструкции и, кроме того, увеличивает емкость конденсатора. Для увеличения емкости используются диэлектрики с большим значением абсолютной диэлектрической проницаемости ϵ_a (см. далее «Вычисление емкостей»).

Если в качестве диэлектрика между пластинами находится воздух, конденсатор называется *воздушным*.

Условные графические обозначения конденсаторов в электрических схемах приведены на рис. 1.15, *б*, *в*.

Если конденсатор подсоединить к источнику электрической энергии (рис. 1.16), то конденсатор заряжается: на его обкладках накапливаются заряды. Если после того, как конденсатор зарядился, его отсоединить от источника, то его электрическая энергия сохраняется (при идеальном диэлектрике бесконечно долго), так как удельная электрическая проводимость диэлектрика пренебрежимо мала. Поэтому *конденсаторы могут служить для накопления и сохранения электрического поля и его энергии*.

Емкостью конденсатора называется величина, характеризующая связь заряда конденсатора с напряжением между его обкладками.

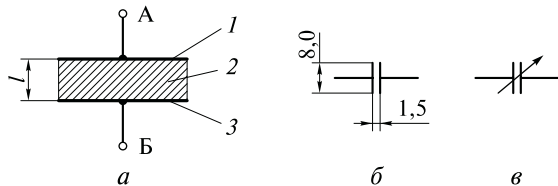
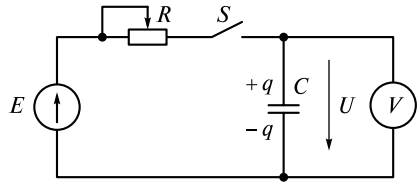


Рис. 1.15. Конденсатор (*а*) и условные обозначения с постоянной емкостью (*б*) и с переменной емкостью (*в*):

1, 3 — обкладки; *2* — диэлектрик

Рис. 1.16. Схема зарядки конденсатора



Она численно равна отношению заряда к напряжению:

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (1.34)$$

Конденсаторы, выпускаемые промышленностью. Промышленность выпускает конденсаторы различных емкостей: от единиц пикофард до тысяч микрофард, рассчитанных на напряжения от единиц вольт до десятков киловольт. Обладая такими различными параметрами, конденсаторы отличаются друг от друга размерами, конструкцией и диэлектриком.

В соответствии с применяемым диэлектриком конденсаторы бывают *бумажные, слюдяные, керамические, электролитические и воздушные* (рис. 1.17).

Бумажный конденсатор (рис. 1.17, а) состоит из двух длинных лент фольги (гибких плоскостей — обкладок), разделенных диэлектриком — лентой тонкой парафинированной бумаги. Полученную систему из трех лент сворачивают в рулон и помещают в защитную оболочку. К обкладкам присоединяют выводы. Бумажный конденсатор является *плоским конденсатором*, у которого трехслойная система гибких плоскостей свернута в рулон.

Как будет показано далее, чем меньше толщина диэлектрика (тонкая бумага) и больше площадь пластин конденсатора (длинные ленты), тем больше емкость плоского конденсатора.

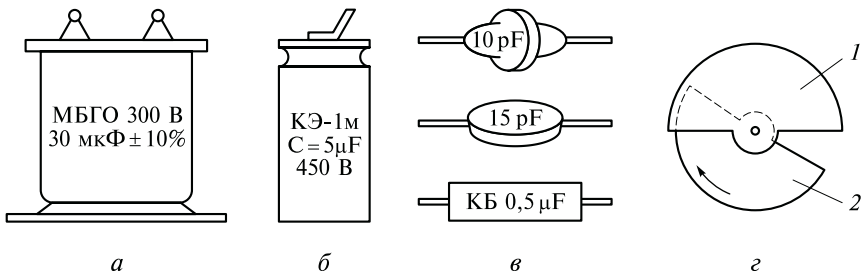


Рис. 1.17. Конденсаторы:

а — бумажный; б — электролитический; в — керамические; г — воздушный:
1 — неподвижная обкладка; 2 — подвижная обкладка

В *электролитических конденсаторах* (рис. 1.17, б) диэлектриком служит тончайший слой оксида на поверхности алюминиевой или танталовой фольги, являющейся одной из обкладок конденсатора. Второй обкладкой служит бумага или ткань, пропитанная густым раствором электролита.

Малая толщина слоя оксида (диэлектрика) дает возможность получить большую емкость при небольших размерах конденсатора.

Самые большие по размерам бумажные конденсаторы применяются для подключения аппаратуры телемеханики и связи к высоковольтным линиям. Самые маленькие по размерам конденсаторы (рис. 1.17, в) применяются в радиоаппаратуре и автоматических устройствах.

Конденсаторы (см. рис. 1.17, а...в) являются *нерегулируемыми*. Их геометрические параметры неизменны. В технике используются и *конденсаторы с регулируемой емкостью* (рис. 1.17, г). К ним относятся *воздушные конденсаторы* с жесткой конструкцией. У таких конденсаторов подвижная обкладка 2 поворачивается относительно неподвижной обкладки 1, в результате чего изменяется площадь перекрытия обкладок и соответственно меняется емкость.

Вычисление емкостей. Как уже неоднократно упоминалось, емкость зависит от геометрических размеров проводящих тел, их конфигурации и взаимного расположения, диэлектрических свойств окружающей проводники среды. Чтобы в этом убедиться, достаточно получить и проанализировать формулы расчета емкостей наиболее простых по конфигурации конденсаторов. Приведем примеры.

Емкость плоского конденсатора. Выведем формулу расчета емкости плоского конденсатора при условии, что известны его геометрические размеры: площадь пластин — обкладок конденсатора S , расстояние между обкладками d и абсолютная диэлектрическая проницаемость диэлектрика ϵ_a .

Нам известно (см. формулу (1.34)), что емкость конденсатора — это коэффициент пропорциональности между зарядом Q и напряжением U , подведенным к обкладкам конденсатора:

$$C = \frac{Q}{U}.$$

При подключении плоского конденсатора к источнику электрической энергии между его пластинами — обкладками — возникает однородное поле (см. подразд. 1.3), и на обкладках накапливается заряд Q . Заряд равномерно распределяется по поверхности обкладок, образуя поверхностную плотность заряда σ .

Согласно формуле (1.22) заряд $Q = \sigma S$. Напряжение U связано с поверхностной плотностью σ соотношением (1.30).

Подставляя формулы (1.30) и (1.22) в формулу (1.34), получаем

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S \varepsilon_a}{\sigma d},$$

откуда

$$C = \frac{S \varepsilon_a}{d}. \quad (1.35)$$

Анализируя полученную формулу, мы можем сделать вывод: чем больше площадь обкладок конденсатора S и абсолютная диэлектрическая проницаемость диэлектрика ε_a и меньше толщина диэлектрика d , тем больше емкость конденсатора C .

Именно поэтому в бумажных конденсаторах обкладки — длинные ленты, которые для компактности сворачиваются в рулон. Диэлектрик — тонкая лента толщиной в лист бумаги, например парафинированной, имеющей относительную проницаемость $\varepsilon = 4,3$.

Емкость цилиндрического конденсатора. Выведем формулу расчета емкости цилиндрического конденсатора, длина которого l , радиусы внутреннего и наружного цилиндров соответственно R_1 и R_2 при условии, что $l \gg (R_2 - R_1)$. Пространство между цилиндрами заполнено диэлектриком с абсолютной диэлектрической проницаемостью ε_a .

В цилиндрическом конденсаторе обкладками являются два цилиндра, вставленные один в другой, имеющие общую ось (рис. 1.18, а). Электрическое поле такого конденсатора имеет радиальное направление силовых линий от одного цилиндра к другому — радиальную симметрию. Так как согласно условию длина конденсатора l значительно превосходит расстояние между обкладками: $l \gg (R_2 - R_1)$, пренебрегаем искажением поля у краев конденсатора.

В силу симметрии конструкции эквипотенциальные поверхности являются также цилиндрическими и имеют общую ось с обкладками конденсатора.

Используя выводы подразд. 1.2 и 1.3, получим формулу связи напряжения между обкладками конденсатора с зарядом Q и конструктивными параметрами конденсатора.

В случае однородного поля, как следует из формулы (1.16), напряжение U между какими-либо двумя точками равно произведению напряженности поля ξ на расстояние между этими точками. Поле между обкладками цилиндрического конденсатора не является однородным: векторы напряженности поля между обкладками конденсатора не параллельны друг другу, и величина напряженности в разных точках поля конденсатора не одинакова. В таком случае

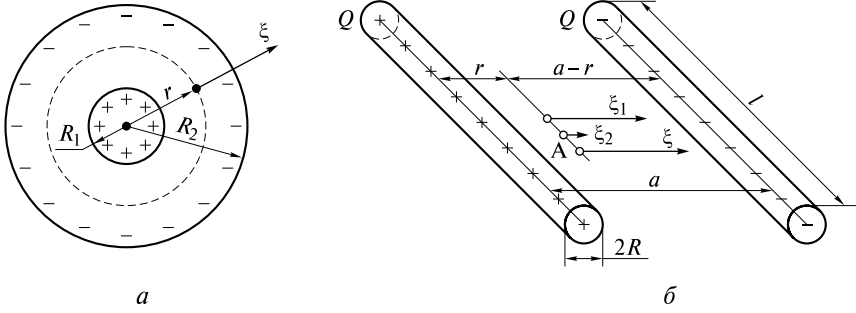


Рис. 1.18. Схемы для определения емкостей:
a — цилиндрического конденсатора; *б* — двухпроводной линии

целесообразно мысленно разбить расстояние $a = R_2 - R_1$ на элементарные участки dr , в пределах которых напряженность поля можно считать постоянной, а напряжение определить как сумму произведений напряженностей поля ξ на участке dr на длину этого участка, т. е. dr :

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \xi dr. \quad (1.36)$$

Согласно формуле (1.27) напряженность электрического поля между обкладками в точках, расположенных на эквипотенциальной поверхности радиуса r :

$$\xi = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l r}.$$

Подставляя формулу (1.27) в формулу (1.36), получим

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} (\ln R_2 - \ln R_1) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Таким образом,

$$U = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (1.37)$$

Согласно формуле (1.34), с учетом формулы (1.37) получим формулу расчета емкости цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (1.38)$$

Емкость двухпроводной линии. Выведем формулу расчета емкости двухпроводной линии длиной l и расстоянием между проводами a (рис. 1.18, б) при условии, что $a \gg R$, где R — радиус провода.

При равномерном распределении заряда вдоль проводника и однородном диэлектрике каждый из проводов создает электрическое поле, напряженность которого определяется по формуле (1.27). Например, в точке А (см. рис. 1.18, б) напряженности положительно и отрицательно заряженных проводов соответственно:

$$\xi_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l r}; \quad \xi_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l (a - r)}.$$

Суммарная напряженность поля в любой точке между проводами определяется наложением напряженностей полей каждого из проводов:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a - r} \right).$$

Как видно из полученного выражения, напряженность поля двухпроводной линии — величина непостоянная, зависящая от r .

В таком случае напряжение U между проводами можно выразить соотношением, аналогичным формуле (1.36):

$$U = \int_R^{a-R} \xi dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \left(\int_R^{a-R} \frac{1}{r} dr + \int_R^{a-R} \frac{1}{a - r} dr \right);$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} [\ln(a - R) - \ln R - \ln R + \ln(a - R)] = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} 2 \ln \frac{a - R}{R} = \\ &= \frac{Q}{\pi\epsilon_a l} \ln \frac{a - R}{R}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $a \gg R$, напряжение между проводами

$$U = \frac{Q}{\pi\epsilon_a l} \ln \frac{a}{R}.$$

Емкость двухпроводной линии

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{a}{R}}. \quad (1.39)$$

Линейные и нелинейные конденсаторы и их емкости. Как видно из расчетных формул (1.35), (1.38), (1.39), емкости конденсаторов зависят от абсолютных диэлектрических проницаемостей ϵ_a их диэлектриков. Конденсаторы, у которых абсолютная диэлектрическая проницаемость диэлектрика постоянна $\epsilon_a = \text{const}$, не зависят от напряженности поля или заряда пластин, обладают постоянной емкостью. Такие конденсаторы имеют линейную зависимость заряда Q от напряжения U и поэтому называются *линейными* (так же, как и их емкости).

Конденсаторы с диэлектриком типа *сегнетоэлектриков, электроэретов*, имеющие непостоянную величину ϵ_a (зависящую от напряженности электрического поля внутри конденсатора), называются *нелинейными* (так же, как и их емкости) из-за нелинейной зависимости заряда Q от напряжения U .

1.6. Энергия электрического поля

Энергия заряженных тел — энергия электрического поля. Из подразд. 1.1 и 1.2 нам известно, что электрическое поле существует вокруг заряженных тел. Оно обладает энергией, так как характеризуется силовым воздействием на заряженные частицы. Энергия поля проявляется в виде механической работы, совершаемой при перемещении заряженных частиц, находящихся в электрическом поле и имеющих возможность свободно перемещаться.

Энергия приобретает телом при его зарядке. Это связано с тем, что процесс зарядки тела означает всегда разделение зарядов, т.е. создание на одном теле избытка зарядов одного знака, а на другом теле — другого знака. При этом приходится преодолевать силы притяжения друг к другу положительных и отрицательных зарядов, т.е. затрачивать работу. Таким образом, из закона сохранения энергии следует, что энергия электрического поля системы заряженных тел равна работе, затраченной во время накопления заряда этой системой.

Энергия электрического поля плоского конденсатора. Итак, чтобы зарядить конденсатор, т.е. создать некоторую разность потенциалов между двумя телами — обкладками конденсатора, следует затратить некоторую работу. При зарядке конденсатора его заряд образуется переносом заряженных частиц с одной обкладки на другую под действием внешнего источника энергии (см. рис. 1.16).

Когда конденсатор разряжается, т.е. ранее разделенные заряды воссоединяются, то такую же по величине работу совершают электрические силы.

Таким образом, *заряженный конденсатор обладает запасом потенциальной энергии $W_э$, равным той работе, которая была затрачена на его зарядку.*

Другими словами, заряжая конденсатор, мы создаем в нем электрическое поле; при разрядке конденсатора это поле исчезает. Затраченная источником энергии работа пошла на создание поля, а работа, совершаемая при разрядке конденсатора, получается за счет исчезновения этого поля. Следовательно, мы можем сказать, что *всякое электрическое поле обладает некоторым запасом потенциальной энергии $W_э$, освобождаемой при исчезновении этого поля.*

Вычисление запаса энергии и. Зарядка конденсатора (появление электрических зарядов $+Q$ и $-Q$ на двух телах) под действием внешнего источника энергии равносильна раздвижению двойного слоя электрических зарядов на расстояние d .

Рассмотрим уже заряженный конденсатор.

До тех пор пока расстояние d между пластинами мало по сравнению с размерами пластин, т.е. до тех пор пока конденсатор можно считать плоским, напряженность поля ξ в нем не зависит от расстояния d .

Действительно мы знаем, что в плоском конденсаторе поле однородно и напряженность его (см. формулу (1.29)):

$$\xi = \sigma / \epsilon_a = Q / (S \epsilon_a),$$

где Q и S — заряд пластины и ее площадь соответственно.

Силы, с которыми притягиваются друг к другу две противоположно заряженные пластины конденсатора, зависят от величины заряда на каждой из пластин и от напряженности поля пластины:

$$F = F_1 = F_2 = \xi_1 Q = \xi_2 Q = \frac{\xi}{2} Q. \quad (1.40)$$

Так как при изменении расстояния d между пластинами не изменяются ни заряд Q , ни напряженность ξ , то неизменной остается и сила притяжения F .

Но, когда расстояние между пластинами равно нулю (т.е. пластины сложены вместе), их заряды $+Q$ и $-Q$ образуют компенсированный двойной слой, и система пластин не заряжена. Зарядка конденсатора (появление отдельных электрических зарядов $+Q$ и $-Q$ на двух пластинах) равносильна раздвижению двойного слоя электрических зарядов на расстояние d .

Работа, которую нужно затратить, чтобы раздвинуть пластины до расстояния d :

$$A = Fd. \quad (1.41)$$

Подставляя в формулу (1.41) выражение (1.40), получим

$$A = Fd = \frac{\xi}{2} Qd. \quad (1.42)$$

Так как в соответствии с формулой (1.11) $\xi = U/d$, получим, что запас энергии электрического поля

$$W_э = A = \frac{QU}{2}. \quad (1.43)$$

Принимая во внимание формулу (1.34), выражение (1.43) можно представить в виде

$$W_э = A = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}. \quad (1.44)$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятий «заряд», «точечный заряд». Что принято за единицу измерения заряда?
2. Что такое электрическое поле и чем оно характеризуется?
3. Сформулируйте закон Кулона.
4. Как определить силу действия на заряд множества зарядов?
5. Что характеризуют величины: диэлектрическая проницаемость и относительная проницаемость? В чем их отличие? Чему они равны для вакуума, воздуха и других сред?
6. Сформулируйте теорему Остроградского — Гаусса. Каково ее назначение?
7. Каковы особенности однородного электрического поля? Приведите примеры получения однородного электрического поля.
8. Что представляют собою эквипотенциальные поверхности?
9. По каким признакам подразделяют вещества на проводники, диэлектрики и полупроводники?
10. В чем сущность явления электростатической индукции?
11. Опишите механизм электростатического экранирования. Что представляют собой экраны?
12. Опишите явление поляризации диэлектрика. Каковы особенности поляризации неполярного, полярного и кристаллического диэлектриков?
13. Опишите особенности строения полупроводников. Как образуются свободные электроны и дырки в полупроводнике? Как электрическое поле влияет на электропроводность полупроводников?
14. Какое устройство называют конденсатором?
15. Что называется емкостью конденсатора и от чего она зависит?

Глава 2

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ. ЗАКОН ОМА

2.1. Электрический ток и его плотность

Электрический ток. Явление направленного движения свободных носителей электрического заряда в веществе или в вакууме под действием электродвижущих сил электрического или магнитного полей называется *электрическим током проводимости*.

В общем случае электрический ток создается любыми носителями зарядов (электронами, положительными и отрицательными ионами), перемещаемыми какими-либо силами. Электрический ток нельзя наблюдать непосредственно. О прохождении тока судят по его действию — тепловому, магнитному и химическому.

Постоянный электрический ток — это ток, не изменяющийся во времени по значению и направлению. *Переменный электрический ток* — это ток, изменяющийся с течением времени по значению и направлению.

Хорошими проводниками электрического тока являются металлы и их сплавы — проводники первого рода (см. подразд. 1.4).

В металлических проводниках электрический ток создается направленным перемещением электронов.

Направление тока традиционно принято определять по направлению перемещения положительных носителей зарядов. Таким образом, *в металлических проводниках направление тока противоположно движению заряженных частиц, каковыми являются электроны.*

Сила тока (I — для постоянного тока и i — для переменного тока) определяется как количество электричества, проходящее через поперечное сечение S проводника в единицу времени.

Обозначив буквой Q (q) заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за время t , получим:

- для постоянного тока

$$I = \frac{Q}{t}, \quad \text{или} \quad I = \frac{q}{t}; \quad (2.1)$$

- для переменного тока

$$i = \frac{dQ}{dt}, \quad \text{или} \quad i = \frac{dq}{dt}, \quad (2.2)$$

где dQ (dq) — бесконечно малый заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за бесконечно малый промежуток времени dt .

Практика подтверждает следующую особенность протекания тока: *ток нигде в проводнике не накапливается и одинаков во всех сечениях проводника*. Эта особенность определяется как *принцип непрерывности течения тока*.

Для количественной оценки силы тока была принята единица измерения — *ампер* (А), названная так в честь ученого А. Ампера, внесшего большой вклад в развитие науки об электричестве. Таким образом,

$$[I] = \text{А}.$$

Если через поперечное сечение проводника за одну секунду проходит электрический заряд, равный одному кулону, то постоянный ток в проводнике равен одному амперу, т. е.

$$1 \text{ А} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ с}}.$$

Производные единицы измерения:

1 мкА (микроампер) = $1 \cdot 10^{-6}$ А; 1 mA (миллиампер) = $1 \cdot 10^{-3}$ А.

Измерение силы тока. Для измерения силы тока служат электроизмерительные приборы — *амперметры*.

Амперметры включаются последовательно с потребителем электрической энергии, ток которого необходимо контролировать.

Работа измерителей тока основана на тепловом, магнитном или химическом действиях тока. По принципу действия и конструктивным особенностям измерительного механизма амперметры подразделяются на электромагнитные, магнитоэлектрические, электродинамические, ферродинамические, тепловые и другие приборы.

Амперметры бывают *стрелочные* и *цифровые*.

В стрелочных приборах о силе тока судят по отклонению стрелки. Значение измеряемой величины определяют по шкале, которая имеет деления, т. е. *проградуирована*. При измерении важно иметь представление о таких понятиях, как предел измерения и цена деления.

Предел измерения (П) электроизмерительного прибора (в том числе амперметра) — это значение измеряемой величины (в данном случае силы тока), при которой стрелка прибора отклоняется на всю шкалу.

Во многих случаях, когда приходится измерять существенно отличающиеся по значению токи, целесообразно использовать *многопредельные приборы*. Можно применять и дополнительные устройства — *шунты* (сопротивления, определенным образом включаемые в цепь), расширяющие пределы измерения приборов.

Перед измерением необходимо оценить порядок измеряемой силы тока и выбрать безопасный для прибора предел измерения. *Безопасный предел измерения должен превышать значение измеряемого тока.* В противном случае происходит «зашкаливание» прибора: стрелка отклоняется за пределы шкалы. При этом слишком большой ток, протекающий по цепи прибора, может вызвать его неисправность.

Цена деления C установленного предела измерения прибора (в том числе амперметра) — это значение измеряемой величины (в данном случае силы тока), при которой стрелка отклоняется на одно деление.

Цена деления равна пределу измерения Π , деленному на число делений шкалы N :

$$C = \frac{\Pi}{N}.$$

Значение измеряемой величины (в данном случае силы тока) равно цене деления C установленного предела измерения прибора, умноженной на число делений отклонения стрелки K :

$$I = CK.$$

Пример 2.1. Многопредельный прибор имеет пять пределов измерения тока: 750 мА, 300 мА, 30 мА, 3 мА и 0,3 мА. Шкала амперметра содержит 30 делений. Определить цену деления прибора для каждого предела измерения.

Решение. Для определения цены деления разделим предел измерения Π на число делений шкалы N . Результаты вычислений:

Π (предел измерения), мА.....	750	300	30	3	0,3
C (цена деления), мА/дел	25	10	1	0,1	0,01

Пример 2.2. На приборе, рассмотренном в примере 2.1, установили предел измерения 750 мА. При измерении тока стрелка прибора отклонилась на 25 делений. Чему равно значение измеряемой силы тока?

Решение. Значение измеряемой силы тока I равно цене деления C при заданном пределе измерения Π (см. пример. 2.1), умноженной на K — число делений отклонения стрелки:

$$I = CK = 25 \cdot 25 = 625 \text{ мА} = 0,625 \text{ А}.$$

Плотность тока. Очень важной характеристикой электрического тока является плотность его прохождения через поперечное сечение проводника.

Плотность тока J — это ток, проходящий через единицу поперечного сечения S проводника при условии равномерного распределения силы тока по сечению, т.е.

$$J = \frac{I}{S}. \quad (2.3)$$

Поскольку на практике сечение проводников измеряется в квадратных миллиметрах, то единица плотности тока

$$[J] = 1 \text{ А/(1 мм}^2\text{)}.$$

Если проводник в различных своих участках имеет разные поперечные сечения (S_1 , S_2 и т.д.), то плотность тока в проводнике в силу принципа непрерывности протекания тока имеет различные значения:

$$J_1 = I/S_1; J_2 = I/S_2 \text{ и т.д.}$$

Допустимая плотность тока в современной бытовой практике принята равной 2 А/мм^2 . Превышение указанной плотности может вызвать перегрев материалов современных проводников, порчу оборудования и, в худшем случае, возгорание. Электрические цепи специального оборудования (например, в авиа- и ракетостроении) выполняют из материалов, допускающих более высокие плотности токов: 4 А/мм^2 и более. В указанных случаях огромное значение играют габаритные размеры и масса поднимаемого в воздух оборудования. Согласно формуле (2.3) чем больше J , тем меньше площадь поперечного сечения проводников S при том же токе I в них, а следовательно, и масса электрических цепей и оборудования в целом.

Пример 2.3. Определить диаметр проводов электропроводки, которые при силе тока в 5 А обеспечивают плотность тока 2 А/мм^2 .

Решение. Из формулы (2.3) следует

$$S = I/J = 5/2 = 2,5 \text{ мм}^2.$$

Так как $S = \pi d^2/4$, то диаметр проводов

$$d = \sqrt{4S/\pi} = \sqrt{4 \cdot 2,5/\pi} = 1,78 \text{ мм}.$$

Пример 2.4. Электропроводка выполнена проводом сечением $1,5 \text{ мм}^2$. Чему равна допустимая сила тока в проводах?

Решение. Принимая допустимую плотность тока на практике 2 А/мм^2 , из формулы (2.3) получаем значение допустимой силы тока I в проводах:

$$I = JS = 2 \cdot 1,5 = 3 \text{ А}.$$

2.2. Источники электрической энергии

Для поддержания непрерывного тока в проводнике необходимо каким-либо способом поддерживать разность потенциалов

на его концах. Для этого служат источники электрической энергии.

Источники электрической энергии — это разнообразные устройства, в которых имеет место преобразование того или иного вида энергии в электрическую энергию. К ним относятся электромашинные генераторы, гальванические элементы, аккумуляторы и др.

Электромашинные генераторы. Это достаточно мощные источники, преобразующие механическую энергию в электрическую. Принцип работы источника заключается в следующем. Производится механическая работа по перемещению проводника в магнитном поле. Свободные электроны в движущемся проводнике под действием сил магнитного поля (*сторонних сил* не кулоновского происхождения) перемещаются к одному концу проводника, на противоположном конце проводника создается избыток положительных зарядов. Пока совершается движение, на концах проводника создается и поддерживается разность потенциалов. Если к концам проводника присоединить замкнутую цепь, по ней потечет ток. Более подробно устройство и принцип действия электромашинных генераторов описаны в гл. 7.

Гальванические (первичные) элементы. Источники электрической энергии, в которых происходит преобразование химической энергии в электрическую, называются *гальваническими элементами*. После изготовления они не требуют предварительной электролитической обработки и могут быть использованы сразу, поэтому они называются *первичными элементами*. Процесс преобразования энергии в гальванических элементах необратим. После разрядки их нельзя восстановить и использовать повторно. Разность потенциалов (напряжение) на электродах создается и поддерживается за счет разделения зарядов внутри элемента химическими (*сторонними* по отношению к электрическому полю) силами.

Гальванические элементы состоят из разнородных электродов, погруженных в один электролит или отдельно в два разных электролита, отделенных друг от друга пористой перегородкой. Разность потенциалов зависит от материала электрода и состава электролита.

Наиболее распространенными гальваническими элементами являются марганцево-цинковые элементы. По конструкции они подразделяются на стаканчиковые и галетные. В элементе стаканчиковой конструкции, схема устройства которого представлена на рис. 2.1, электрод 1, выполненный из цинка, имеет форму полого цилиндра. Внутри стакана расположен электрод 2 — в виде угольного стержня. Угольный электрод окружен деполяризатором из диоксида марганца, графита и сажи 3. Цинковый стакан заполняется электролитом 4 — водным 25%-м раствором нашатыря (хлористого аммония) с добавлением крахмала в качестве загустителя.

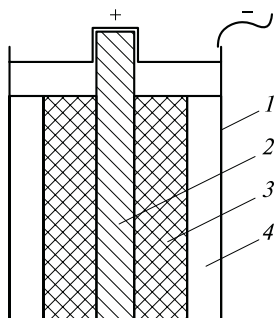


Рис. 2.1. Марганцево-цинковый элемент:

- 1 — цинковый электрод;
 2 — угольный электрод;
 3 — деполяризатор; 4 — электролит

Появление разности потенциалов между электродами элемента объясняется тем, что вещество электрода (цинка) под действием химических сил растворяется в электролите (нашатыре). При этом положительные ионы переходят в раствор, а на цинковом электроде остаются не скомпенсированные отрицательные заряды: он становится отрицательным электродом. Угольный электрод получает положительный заряд от электролита и становится положительным электродом. Между отрицательными зарядами цинкового электрода и положительными ионами электролита возникает и по мере протекания химической реакции растет электрическое поле, препятствующее переходу положительных ионов с электрода в раствор. Когда противодействующие силы (химические и электрические) уравниваются друг друга, растворение цинка и разделение зарядов прекращается.

Во время химической реакции на угольном электроде выделяется водород. Водород и электролит создают между собой гальваническую пару с разностью потенциалов, которая направлена против разности потенциалов между электродами и уменьшает ее. Это явление называется *поляризацией*. Поляризацию ослабляют введением так называемых деполяризаторов (из диоксида марганца, графита и сажи), назначение которых — окисление выделяющегося водорода.

Напряжение на электродах гальванического элемента составляет либо 1,2 В, либо 1,5 В. Для получения более высоких напряжений отдельные элементы соединяют последовательно в батареи.

Помимо напряжения, гальванические элементы характеризуются номинальным разрядным током и емкостью.

Номинальный разрядный ток элемента — это наибольший длительный ток, допускаемый при его эксплуатации.

Емкость элемента — это количество электричества, выраженное в ампер-часах (А·ч), которое может проходить через элемент за весь период его работы.

Гальванические элементы и собранные из них батареи широко применяют для питания различных (обычно переносных) электротехнических и радиотехнических устройств.

Аккумуляторы (вторичные элементы). *Вторичными элементами* называются элементы, которые могут давать ток только после предварительной электролитической обработки. К таким элемен-

там относятся электрические аккумуляторы. Непосредственно после сборки аккумулятор необходимо заряжать, пропуская через него ток. При пропускании тока через аккумулятор сторонняя электрическая энергия превращается в химическую энергию. За счет химической энергии происходит накопление разноименных электрических зарядов и соответствующий рост разности потенциалов на электродах аккумулятора. Накопленная разность потенциалов является потенциальным источником электрической энергии.

В отличие от гальванических элементов аккумуляторы могут быть использованы многократно, так как составляющие аккумулятора (электроды и электролит) обладают способностью восстанавливать свое химическое состояние при повторной зарядке. Сейчас самыми распространенными являются *свинцовые* и *щелочные аккумуляторы*.

Аккумуляторы так же, как и гальванические элементы, характеризуются напряжением, номинальным разрядным током и емкостью.

2.3. Закон Ома для участка цепи. Электрическое сопротивление и проводимость

Понятие об электрическом сопротивлении. При подключении участка проводника к источнику электрической энергии внутри проводника возникает электрическое поле, под действием электрических сил которого свободные электроны начинают перемещаться вдоль проводника — создается электрический ток. При этом электроны всегда встречают сопротивление своему движению: при движении они сталкиваются с атомами проводника и теряют часть запасенной кинетической энергии, проводник нагревается. Находясь под действием электрического поля, электроны снова ускоряются и т.д. В результате в проводнике устанавливается некая средняя скорость движения потока электронов.

В 1820-х гг. немецкий физик Георг Ом проводил эксперименты с проводниками разных длин, сечений и материалов в поисках зависимости тока от приложенного к концам проводника напряжения. Г. Ом пришел к выводу, что постоянное электрическое напряжение для проводников прямо пропорционально постоянному электрическому току, т.е. *отношение между напряжением, приложенным к проводнику, и силой тока для проводников является величиной постоянной*.

Величину отношения напряжения, приложенного к проводнику, к силе тока, протекающему в нем, называют *электрическим сопротивлением R*. Таким образом, *сопротивление* — это коэффициент пропорциональности между напряжением и силой тока:

$$R = \frac{U}{I} = \text{const.} \quad (2.4)$$

Электрическое сопротивление характеризует потери энергии при протекании тока в проводнике — безвозвратного преобразования электромагнитной энергии в другие виды энергии, в основном в теплоту.

Единица измерения сопротивления «Ом» названа в честь Г. Ома:

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом.}$$

Десятичные кратные единицы измерения сопротивлений:

$$1 \text{ кОм (килоом)} = 1 \cdot 10^3 \text{ Ом}; 1 \text{ МОм (мегаом)} = 1 \cdot 10^6 \text{ Ом.}$$

Позже было установлено, что постоянство сопротивления — свойство относительное, справедливо только для определенных материалов и только в определенном диапазоне токов и напряжений.

В тех случаях, когда сопротивление проводников является величиной постоянной, его называют *линейным*, или *омическим*, *сопротивлением*, так как график зависимости между напряжением и током — прямая линия.

Сопротивления, у которых коэффициент пропорциональности между напряжением и током не является величиной постоянной, называются *нелинейными*.

Закон Ома для участка цепи. Из соотношения (2.4) следует

$$U = RI. \quad (2.5)$$

Экспериментально соотношение вида (2.5) впервые было открыто Г. Омом для проводников и получило название *закона Ома для участка цепи*.

Электрическая проводимость. Величина, обратная сопротивлению, называется *электрической проводимостью*

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}. \quad (2.6)$$

Проводимость характеризует *электропроводность* проводников. Чем больше проводимость, тем лучше электропроводность.

Проводимость измеряется в *сименсах* (См):

$$[G] = 1/\text{Ом} = \text{См, т. е. } 1 \text{ См} = 1 \text{ Ом}^{-1}.$$

Один сименс — это электрическая проводимость проводника, сопротивление которого составляет 1 Ом.

Зависимость сопротивления от геометрических размеров проводника. Известно, что в протяженных проводниках, имеющих постоянное сечение S и длина которых l велика по сравнению с поперечным сечением, напряжение, приложенное к проводнику, равномерно распределяется вдоль длины проводника, создавая в проводнике электрическое стационарное (не изменяющееся во времени) поле с напряженностью $\xi = U/l$. В таких проводниках плотность тока во всех точках сечения имеет одно и то же значение. Подставляя в выражение для напряженности соотношения (2.3) и (2.5), получим

$$\xi = \frac{U}{l} = \frac{RI}{l} = \frac{RJS}{l}. \quad (2.7)$$

Из формулы (2.7) получим

$$R = \frac{\xi l}{JS}. \quad (2.8)$$

Отношение напряженности поля к плотности тока называется *удельным сопротивлением*

$$\rho = \frac{\xi}{J}. \quad (2.9)$$

Из соотношения (2.8), с учетом формулы (2.9) получим

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (2.10)$$

Таким образом, *сопротивление линейного протяженного проводника прямо пропорционально его удельному сопротивлению и длине и обратно пропорционально его сечению.*

Удельное сопротивление проводника — характеристика материала проводника. Удельное сопротивление проводника ρ зависит от внутреннего строения материала проводника и является характеристикой материала, из которого изготовлен проводник.

Из формулы (2.10) можно получить соотношение

$$\rho = R \frac{S}{l}, \quad (2.11)$$

согласно которому *удельное сопротивление* — это сопротивление линейного проводника длиной в 1 м, имеющего постоянное поперечное сечение 1 м².

Единица измерения удельного сопротивления: $[\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м}$.

В электротехнике принято использовать внесистемную единицу измерения удельного сопротивления: $[\rho] = \text{Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$. Здесь дли-

на измеряется в метрах, а сечение — в квадратных миллиметрах. В этом случае удельное сопротивление — это сопротивление проводника (в омах), длина которого 1 м и сечение 1 мм².

Удельная проводимость γ обратно пропорциональна удельному сопротивлению:

$$\gamma = \frac{1}{\rho}. \quad (2.12)$$

Из соотношения (2.12), с учетом (2.11) получим формулу

$$\gamma = \frac{1}{R} \frac{l}{S} = G \frac{l}{S}. \quad (2.13)$$

Согласно формуле (2.13) удельная проводимость — это проводимость проводника длиной 1 м, имеющего поперечное сечение 1 мм².

Единица измерения удельной проводимости:

$$[\gamma] = \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}} = \frac{\text{См}}{\text{м}}.$$

Зависимость сопротивления от температуры. Экспериментально доказано, что сопротивление проводников изменяется в зависимости от температуры. При изменении температуры разные проводники ведут себя по-разному. Различная реакция на изменение температуры объясняется различием в строении разных проводниковых материалов.

Реакция проводников на нагревание. При нагревании металлического проводника его сопротивление увеличивается, так как увеличивается интенсивность колебаний атомов около своих положений. Это приводит к увеличению числа столкновений свободных электронов с атомами и, следовательно, к уменьшению времени их свободного пробега τ . Уменьшение τ увеличивает удельное сопротивление материала и согласно формуле (2.10) сопротивление проводника.

При нагревании электролита и угольного проводника время пробега τ свободных заряженных частиц (положительных и отрицательных ионов в электролите и электронов в угле) также уменьшается, но при этом с большой интенсивностью растет концентрация носителей зарядов. Именно это и приводит к уменьшению сопротивления электролита и угольного проводника при нагревании.

Проводники, выполненные из некоторых сплавов (например, константан, манганин, фехраль), при нагревании практически не изменяют своего сопротивления. Они имеют высокое удельное

сопротивление и малое время пробега электронов из-за неправильной структуры сплавов.

Определение значений сопротивлений металлических проводников при любой температуре. Для металлических проводников опытным путем установлено, что относительное приращение сопротивления с достаточной точностью пропорционально абсолютному приращению температуры:

$$\frac{R_2 - R_1}{R_1} = \alpha(t_2 - t_1), \quad (2.14)$$

где R_1 — сопротивление при начальной температуре t_1 ; R_2 — сопротивление при конечной температуре t_2 ; α — коэффициент пропорциональности, который называют *температурным коэффициентом сопротивления* (ТКС).

Из формулы (2.14) можно получить формулу вычисления значения сопротивления при любой температуре:

$$R_2 = R_1[1 + \alpha(t_2 - t_1)]. \quad (2.15)$$

Температурный коэффициент сопротивления. Из соотношения (2.14) получаем

$$\alpha = \frac{(R_2 - R_1) / R_1}{t_2 - t_1}. \quad (2.16)$$

Из формулы (2.16) следует, что ТКС численно равняется относительному изменению сопротивления при изменении температуры на 1°C .

Значения ТКС разных проводниковых материалов получают опытным путем.

Единица измерения ТКС: $[\alpha] = 1/^\circ\text{C}$.

Пример 2.5. Для линии электропередачи использован медный провод сечением $S = 95 \text{ мм}^2$ и длиной $l = 120 \text{ км}$. Определить сопротивление линии при температуре 20°C .

Решение. Для определения сопротивления линии при температуре 20°C воспользуемся формулой (2.10). Учитывая, что удельное сопротивление меди при температуре 20°C $\rho = 0,0175 \text{ (Ом} \cdot \text{мм)}^2/\text{м}$, получим:

$$R_{20} = \rho_{20} \frac{l}{S} = 0,0175 \cdot 120\,000/95 = 22,1 \text{ Ом}.$$

Реакция проводников на понижение температуры. При снижении температуры сопротивление практически всех проводников уменьшается. В ряде металлов и сплавов при по-

нижении температуры до очень низких значений (близких к абсолютному нулю: -273°C) начиная с некоторой «критической» температуры электрическое сопротивление внезапно, скачком, уменьшается в миллиарды раз.

Сопротивление металлов в сверхпроводящем состоянии настолько мало, что практически его можно считать равным нулю.

Это означает, что электроны в проводнике при своем направленном движении не встречают никаких препятствий и не испытывают столкновений. При этом даже при значительных плотностях тока в проводнике совершенно не выделяется тепло. Проводник, находящийся в таком состоянии, называют *сверхпроводником*, а само явление — *сверхпроводимостью*.

Критическая температура, при которой наступает сверхпроводимость, различна у разных металлов, но у всех близка к абсолютному нулю. Например, у свинца она равна $7,3\text{ K}$ (около -266°C), у ртути она составляет $4,12\text{ K}$ (около -269°C).

До настоящего времени большое внимание уделялось созданию проводников с температурой сверхпроводящего перехода, близкой к температуре жидкого азота (78 K или -195°C). Такие проводники, помещенные в жидкий азот, становятся сверхпроводниками. Выбор жидкого азота в качестве среды для создания низкой температуры не случаен. Жидкий азот — дешевый материал, его получают непосредственно из воздуха.

Сверхпроводники выгодно использовать в технике, например, для передачи электроэнергии практически без потерь.

Резисторы. Для практической реализации свойства линейности сопротивления промышленность изготавливает специальные конструктивные элементы — *резисторы*. Это устройства, которые включаются в электрическую цепь для ограничения или регулирования тока.

Резисторы бывают нерегулируемые и регулируемые, непроволочные и проволочные.

Линейные нерегулируемые резисторы (рис. 2.2) характеризуются двумя параметрами, которые указываются на корпусах резисторов:

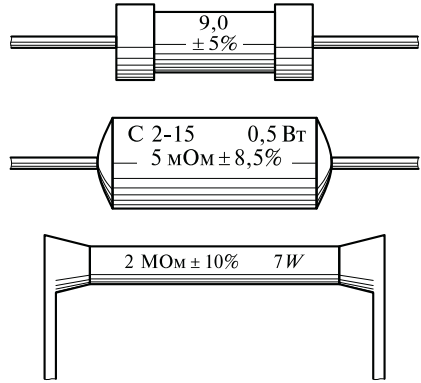
- номинальным значением сопротивления;
- допустимой мощностью рассеяния.

Номинальное значение сопротивления — значение сопротивления резистора, указанное на корпусе. Допускается отличие фактического значения сопротивления на величину допуска, указанного на корпусе в процентах от номинального значения.

Допустимая мощность рассеяния — максимальная мощность, при которой резистор сохраняет свои физические и электрические свойства, в том числе постоянное значение сопротивления.

На рис. 2.2 представлена маркировка резисторов, принятая до 1990-х гг. В современных резисторах маркировка допустимой мощ-

Рис. 2.2. Линейные нерегулируемые резисторы



ности рассеяния выполняется в виде штрихкодов на корпусе резистора и условно-графическом изображении на чертеже. Например, для мощностей от 0,05 до 5 Вт маркировка согласно ГОСТ 2.728—74 имеет следующий вид:

Мощность, Вт.....	0,05	0,125	0,25	0,5	1	2	5
Штрихкод	\\ \\	\\	—			V	

Линейные регулируемые резисторы (рис. 2.3). При необходимости регулирования сопротивления используются резисторы, сопротивление которых может быть плавно или дискретно изменено с помощью специального органа регулирования. Регулируемый проволочный резистор называют *реостатом* (рис. 2.3, а). Зажим 2 реостата соединен с подвижным контактом, два других 1, 3 — с концами спирали. Перемещая подвижный контакт, можно изменять сопротивление между зажимами 1—2 или 2—3.

На рис. 2.3, б показан непроволочный регулируемый резистор. Он устроен следующим образом: дужка из гетинакса, на поверхность которой нанесен тонкий проводящий слой, помещается в

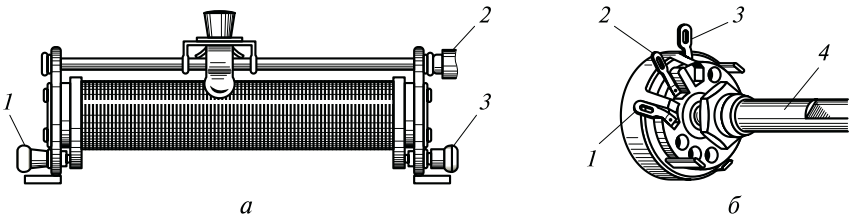


Рис. 2.3. Линейные регулируемые резисторы:

а — реостат со скользящим контактом: 1, 2, 3 — зажимы; б — переменный непроволочный резистор: 1, 2, 3 — выводы; 4 — ось

пластмассовый или металлический корпус. Концы слоя соединены с выводами 1 и 3. На оси 4 укреплена щетка, соединенная с выводом 2. Поворачивая ось, можно изменять сопротивление между выводами 1—2 или 2—3.

Представленные резисторы изготавливаются на относительно сильные токи и имеют относительно большие размеры. В различных устройствах электроники, на печатных платах используют «навесные» резисторы очень маленьких размеров, диаметром 2...3 мм. Такие резисторы называются *дискретными*. В микроэлектронике резисторы «выращивают» непосредственно в материале полупроводника. Они практически не имеют линейных размеров и называются *точечными резисторами*.

2.4. Электрическая цепь и ее основные элементы. Схема электрической цепи

Электрическая цепь. Необходимым условием поддержания непрерывного электрического тока в проводнике является поддержание разности потенциалов на концах проводника (см. подразд. 2.2). Это возможно, если проводник непосредственно или через какие-либо устройства соединен с зажимами источника, т.е. создан замкнутый путь для прохождения тока.

Замкнутый путь для прохождения тока называется *электрической цепью*.

Официальное определение электрической цепи (ГОСТ Р 52002—2003): *электрическая цепь — это совокупность устройств, предназначенных для взаимного преобразования, передачи и распределения электрической и других видов энергии и информации (в виде электрических сигналов), если процессы в устройствах можно описать при помощи понятий о токе, напряжении и электродвижущей силе (ЭДС).*

В состав электрической цепи входят следующие элементы:

- источники электрической энергии (источники питания);
- приемники электрической энергии (потребители);
- устройства для передачи энергии от источников к приемникам;
- другие эксплуатационные устройства.

Источники электрической энергии (см. подразд. 2.2) — это устройства, в которых происходит преобразование различных видов энергии в электрическую энергию. Внутри них сторонними силами (не электрического происхождения) совершается работа по разделению зарядов, в результате чего на клеммах источников создается разность потенциалов, необходимая для поддержания тока в электрической цепи.

Приемники электрической энергии (потребители) — это устройства, в которых происходит обратное преоб-

разование: электрической энергии в другие виды энергии. Например, в электродвигателях электрическая энергия преобразуется в механическую энергию, в осветительных приборах — в световую энергию, в разнообразных нагревательных приборах (электрических печах, электрических батареях, рефлекторах и т.д.) — в тепловую энергию, в электролитических ваннах на производстве — в химическую энергию и т.д.

Устройства для передачи энергии от источников к приемникам — это провода, линии передачи, сети.

Проводом называется металлическая проволока, изолированная или неизолированная («голая»). Провода выполняются из меди, алюминия или стали.

Металлические провода представляют собой «каналы», по которым движутся заряды. Путь, по которому проходит электрический ток, на всем протяжении должен иметь *изоляцию*, устраняющую возможность утечки зарядов с проводов в окружающие предметы. Кроме того, изоляция играет защитную роль: она ограждает людей от случайного прикосновения к участкам провода, находящимся под потенциалом, отличным от потенциала земли.

Сопротивление человеческого тела имеет значение порядка десятков тысяч ом (оно различно для разных индивидуумов). Если человек касается руками оголенных осветительных проводов, находящихся под напряжением, ток проходит через человека. Этот ток может быть чрезвычайно опасен для здоровья, поэтому надо остерегаться прикосновения к обнаженным проводам. При напряжении сети 220 В опасность прикосновения может быть смертельной.

Внутри зданий обычно прокладывают провода, изолированные вдоль всей длины слоем лака, шелковой обмоткой или трубкой из резины или специальной пластмассы. Вид изолированного провода показан на рис. 2.4.

Пример 2.6. Определить, какой ток проходит через человека, сопротивление тела которого составляет 36 кОм, если он, касаясь руками осветительных проводов, оказался под напряжением 220 В.

Решение. В соответствии с законом Ома ток

$$I = U/R = 220/36\,000 = 6 \text{ мА.}$$

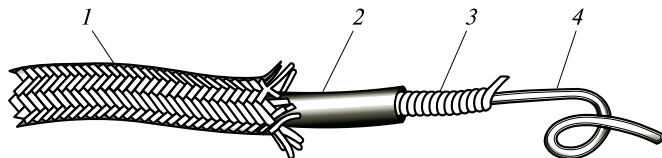


Рис. 2.4. Изолированный провод, применяемый в закрытых помещениях:

1 — оплетка из ниток; 2 — резина; 3 — пряжа; 4 — медная жила

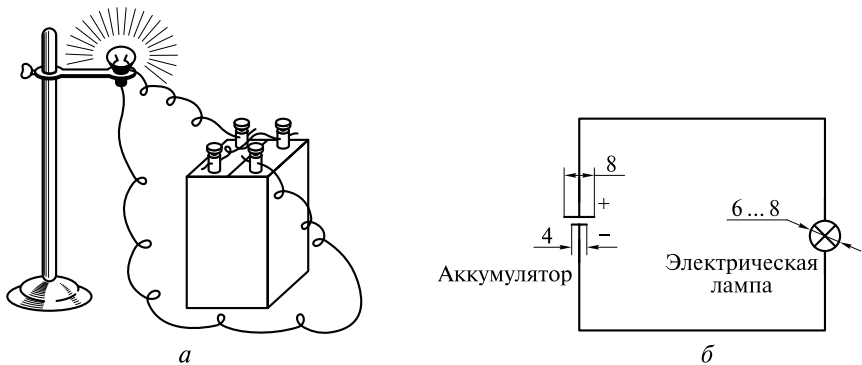


Рис. 2.5. Простейшая электрическая цепь (а) и ее схема (б)

Такой ток опасен для жизни человека.

Другие эксплуатационные устройства. Помимо основных элементов, цепь обычно содержит ряд необходимых для эксплуатации дополнительных устройств, например:

- коммутационная аппаратура (рубильники, выключатели, переключатели и др.);
- аппаратура защиты (реле, плавкие предохранители и др.);
- измерительные приборы (амперметры, вольтметры и др.).

Пример простейшей электрической цепи представлен на рис. 2.5, а. Цепь содержит источник питания — аккумулятор и приемник электрической энергии — лампу накаливания.

Изображение электрической цепи. Для наглядности электрическую цепь принято изображать графически. Графическое изображение электрической цепи с помощью условных обозначений ее элементов называют *схемой электрической цепи*.

При этом для каждого типового элемента цепи введено специальное достаточно простое стандартное условное обозначение, зафиксированное в ГОСТ 2.721—74...2.758—81: «Единая система конструкторской документации. Обозначения условные графические в схемах». Указанные ГОСТы соответствуют стандартам ISO — International Organization for Standardization или МОС — Международная организация по стандартизации.

Некоторые из этих обозначений представлены в табл. 2.1.

На рис. 2.5, б в качестве примера изображена (с использованием обозначений табл. 2.1) схема электрической цепи (см. рис. 2.5, а).

Пример 2.7. Начертить схему электрической цепи (рис. 2.6, а), используя обозначения табл. 2.1.

Решение. Электрическая цепь подключается к источнику питания с помощью двухпроводной линии электропередачи.

Напряжение с электростанции подводится по наружным проводам через разъёмные контактные соединения (а) в помещение.

Условные графические обозначения в схемах

Наименование	Обозначение*
Элемент гальванический или аккумуляторный	
Машина постоянного тока (генератор или двигатель)**	
Произвольный приемник электрической энергии и нерегулируемый резистор	
Резистор переменный	
Осветительная электрическая лампа	
Линия электрической связи (провод, кабель, шина)	
Контакт электрического соединения (разборного, неразборного)	
Провода пересекающиеся (несоединенные, соединенные)	
Предохранитель плавкий	
Выключатели (однополюсный и двухполюсный)	
Прибор измерительный стрелочный***	
Ток (или напряжение):	
постоянный	—
переменный	~

* При первичном изображении того или иного элемента схемы предусмотрено указание размеров обозначений элементов на рисунках.

** В обозначение электрических машин вписывают буквы: генератор — *G*; двигатель — *M*.

*** Для указания назначения прибора в его обозначение вписывают буквы: амперметр — *A*; вольтметр — *V*; ваттметр — *W*; омметр — Ω ; фазометр — ϕ ; счетчик ватт-часов — *Wh*.

Далее ток проходит через предохранители (*b*) и затем попадает к местам потребления: лампочке (*c*), снабженной выключателем (*d*), и штепселю (*e*) с подключенной к нему плиткой (*m*). Для того

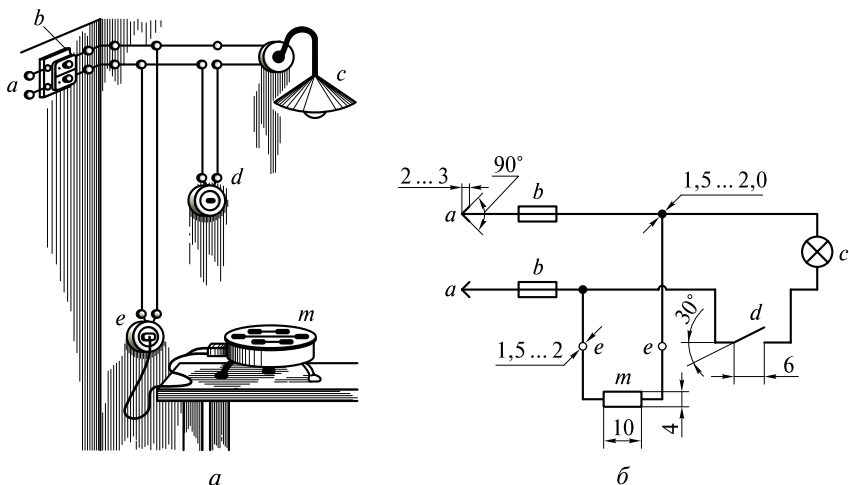


Рис. 2.6. Электрическая проводка (а) и ее электрическая схема (б)

чтобы лампочка и штепсель могли работать независимо друг от друга, они соединяются параллельно.

Схема цепи (см. рис. 2,6, а), выполненная в соответствии с обозначениями табл. 2.1, показана на рис. 2.6, б.

Вольт-амперная характеристика участка электрической цепи. Зависимость напряжения U на участке цепи от протекающего по нему тока I называется *вольт-амперной характеристикой* (ВАХ). По известной вольт-амперной характеристике участка цепи можно определить его сопротивление для любого значения напряжения или тока в диапазоне, определенном ВАХ:

$$R = U/I.$$

Вольт-амперная характеристика участка цепи может быть *линейной* и *нелинейной*.

Для участка с линейным сопротивлением вольт-амперная характеристика представляет собой прямую линию (рис. 2.7), тангенс угла наклона которой к оси тока — величина постоянная, равная омическому сопротивлению участка цепи: $\operatorname{tg}\alpha = R = \operatorname{const}$.

Для участка с нелинейным сопротивлением ($R \neq \operatorname{const}$) ВАХ имеет нелинейный характер.

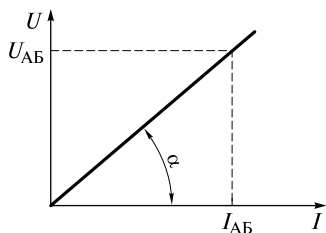


Рис. 2.7. Вольт-амперная характеристика участка с линейным сопротивлением

2.5. Электродвижущая сила

Для протекания тока в электрической цепи необходимо, чтобы в ней работало устройство (источник электрической энергии), внутри которого непрерывно происходили бы процессы, осуществляющие разделение электрических зарядов и тем самым поддерживающие разность потенциалов на зажимах устройства.

Очевидно, что *ток во внешнем по отношению к источнику участке цепи протекает от положительного зажима источника к отрицательному*, т. е. от большего потенциала к меньшему. В силу непрерывности протекания тока в электрической цепи *внутри источника ток должен протекать от отрицательного зажима источника к положительному зажиму*, т. е. от меньшего потенциала к большему. Это возможно только за счет энергии, поступающей извне. Следовательно, источник должен потреблять энергию со стороны: «стороннюю» энергию. Таким образом, причиной, обуславливающей разделение зарядов внутри источника, всегда является «сторонняя» энергия.

Величина, характеризующая работу «сторонних» сил, получила название электродвижущей силы E .

Таким образом, *электродвижущая сила* — величина работы, затрачиваемой «сторонними» силами на перемещение единицы положительного заряда от отрицательного зажима источника к положительному зажиму:

$$E = \frac{A_{\text{ст}}}{Q}, \quad (2.17)$$

где $A_{\text{ст}}$ — работа «сторонних» сил; Q — заряд, перемещаемый «сторонними» силами при совершении работы $A_{\text{ст}}$.

Наименование «электродвижущая сила» сложилось исторически.

Электродвижущая сила характеризует «сторонние силы», не имеющие отношения к электрическим силам, но являющиеся причиной разделения зарядов внутри источника и возникновения разности потенциалов между зажимами источника. Таким образом, термин «электродвижущая сила» характеризует не напряжение, а причину, которая разделяет заряды и тем самым создает электрическое поле (напряжение между точками цепи), которое и вызывает движение зарядов в электрической цепи. Чтобы подчеркнуть различие между «электродвижущей силой» и создаваемой ею разностью потенциалов, наряду с термином «электродвижущая сила» применяют еще выражения «*сторонняя электродвижущая сила*» и «*электроразделительная сила*».

Причины, вызывающие разделение зарядов, в разнообразных источниках разные. Например, в электромашинных генераторах —

это *силы магнитного поля*, в гальванических элементах и аккумуляторах — *силы химических реакций*. В подразд. 2.2 коротко был рассмотрен процесс разделения зарядов (возникновения ЭДС) в электромашинных генераторах и более подробно — внутри химических источников.

Разность потенциалов на зажимах разомкнутого генератора возрастает до тех пор, пока создаваемые напряжением электрические силы не уравновесят сторонние электродвижущие (электро-разделительные) силы.

Поэтому независимо от природы «сторонних» сил *в качестве меры электродвижущих сил, действующих в генераторе, принимают разность потенциалов, которая создается электродвижущими силами на зажимах разомкнутого генератора:*

$$E = \varphi_A - \varphi_K. \quad (2.18)$$

В соответствии с формулой (2.18) единицей измерения ЭДС является вольт (В):

$$[E] = \text{В}.$$

Опыты показывают, что подключение к источнику внешнего участка цепи и допустимые изменения во внешнем участке никак не влияют на величину ЭДС источника. С этой точки зрения *ЭДС источника — величина постоянная.*

Электродвижущая сила источника зависит только от внутренних особенностей самого источника. Например, в первичных химических элементах (см. подразд. 2.2) она представляет собой разность напряжений, возникающих на границах между электролитом и электродами, а каждое из этих напряжений зависит только от природы электродов и состояния электролита, зависящего от времени работы, и от характера взаимодействия между электродами и электролитом. Исследования показывают, что даже геометрические размеры и форма элемента совершенно не влияют на величину его ЭДС.

Необходимо отметить, что в замкнутой электрической цепи разделение зарядов в источнике протекает непрерывно, так как при протекании тока в цепи нарушается равновесие между «сторонней» силой и создаваемой напряжением электрической силой. Дело в том, что заряды, перемещающиеся во внешнем участке цепи, частично компенсируют заряды на зажимах источника и тем самым вызывают уменьшение разности потенциалов (напряжения) между зажимами генератора и создаваемой ею электрической силы, стремящейся уравновесить разделительную силу.

Таким образом, *в замкнутой цепи напряжение на зажимах источника всегда меньше его ЭДС: $U < E$.*

2.6. Схема замещения электрической цепи

В электротехнике помимо термина «схема электрической цепи» существует термин «схема замещения электрической цепи». В чем их отличие?

Если в схеме конкретной электрической цепи обозначения элементов заменить обозначениями параметров, отражающих физические свойства этих элементов, то такая схема будет называться *схемой замещения электрической цепи*. Такие схемы удобны для расчета режимов работы электрических цепей.

Например, всякий потребитель (резистор, двигатель, электрическая лампа, нагревательный элемент и т.д.) характеризуется таким параметром как *сопротивление*. Поэтому любой потребитель в схеме замещения представляют («замещают») графическим обозначением этого параметра (см. табл. 2.1 — произвольный приемник электрической энергии замещают буквенным (R)).

Источник также представляет определенное сопротивление току. Это сопротивление носит название *внутреннего сопротивления источника* и обозначается R_0 . В гальванических элементах оно складывается из сопротивления его электродов и главным образом из сопротивления столба электролита между ними. Погружая цинковую пластину на разную глубину, мы изменяем сечение этого столба и вместе с ним внутреннее сопротивление элемента. В электромашинных генераторах одной из составляющих сложного внутреннего сопротивления является омическое сопротивление провода его обмотки.

Определяющим параметром, отражающим назначение источника, является его электродвижущая сила E . Поэтому источник изображается в виде последовательного соединения двух элементов: ЭДС, которая имеет буквенное обозначение E , и внутреннего сопротивления, которое имеет буквенное обозначение R_0 .

Для примера на рис. 2.8 изображена схема замещения электрической цепи (см. рис. 2.5, *а*), электрическая схема которой представлена на рис. 2.5, *б*. На схеме замещения (см. рис. 2.8) источник изображен последовательным соединением двух элементов: ЭДС E (кружок со стрелкой внутри, которая показывает направление ЭДС) и внутреннего сопротивления источника R_0 . Такое изображение источника подчеркивается необходимость учета его внутреннего сопротивления в расчетах режимов работы цепи. Изображение источника ЭДС только кружком возможно в случаях, когда внутренним сопротивлением источника можно пренебречь или его значение учтено в значениях других сопротивлений цепи.

Направление ЭДС совпадает с направлением электроразделительной силы, действующей на положительные заряды и направленной от отрицательного зажима источника к положительному

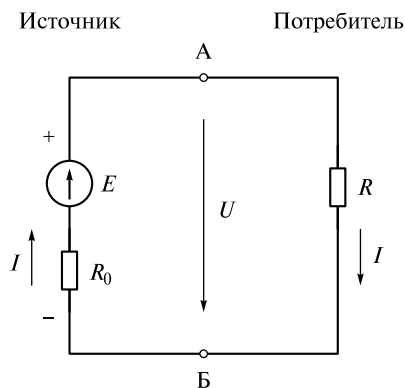


Рис. 2.8. Схема замещения электрической цепи

зажиму. Так как за направление тока принимается направление движения положительных зарядов, то *направление тока внутри источника совпадает с направлением ЭДС*.

В схеме замещения (см. рис. 2.8) не показано сопротивление проводов, соединяющих источник и приемник, так как оно в большинстве случаев много меньше сопротивления потребителя R .

На рис. 2.8 отражено непрерывное протекание тока в замкнутом контуре. При этом ток во внешнем участке цепи протекает от положительного зажима источника, обозначенного буквой А, к отрицательному зажиму, обозначенному буквой Б, т.е. в направлении действия электрического поля на положительные заряженные частицы. Внутри источника, как уже было отмечено ранее, ток направлен против сил электрического поля, т.е. от отрицательного зажима источника к положительному.

На рис. 2.8 показано и направление напряжения U . *Направление напряжения на участках электрической цепи совпадает с направлением действия электрического поля на положительные заряженные частицы, т.е. совпадает с направлением тока во внешних участках цепи*.

2.7. Энергия и мощность электрической цепи. Баланс мощностей

Условие баланса энергии. Рассмотрим процессы, протекающие в замкнутой электрической цепи, с энергетической точки зрения. Как уже известно (см. подразд. 2.2 и 2.5), в элементах электрической цепи происходит ряд преобразований энергии. В источниках питания неэлектрические («сторонние») силы совершают работу по разделению зарядов, создавая в источниках запас потенциальной электрической энергии, равный той работе, кото-

рая была затрачена на разделение зарядов. Таким образом, неэлектрические формы энергии (механическая, химическая или какая-либо другая) преобразуются в электрическую энергию в виде разности потенциалов на зажимах источников. При протекании тока в элементах электрической цепи электрическая энергия источников питания снова преобразуется в другие формы энергии (механическую, химическую, тепловую, световую и др.). Указанные преобразования подчиняются *закону сохранения энергии*.

Условие баланса энергии в электрической цепи может быть представлено следующим образом:

$$A_{\text{ст}} = \sum_{k=1}^n A_k, \quad (2.19)$$

где $A_{\text{ст}}$ — работа «сторонних» сил в источнике; A_k — работа сил электрического поля на k -м участке электрической цепи.

Таким образом, *работа «сторонних» сил в источнике за время работы t равна сумме работ сил электрического поля, затраченных за то же время t на преобразования во всех других элементах цепи, называемых приемниками (потребителями), в том числе в проводах и во внутреннем сопротивлении самого источника.*

Мощность в электрической цепи. В электротехнике, как и в механике, мощность P в общем случае понимают как работу A , совершаемую определенными силами за единицу времени:

$$P = \frac{A}{t}. \quad (2.20)$$

Выразим мощности в электрической цепи в соответствии с формулой (2.20):

мощность источника

$$P_{\text{ист}} = \frac{A_{\text{ст}}}{t}; \quad (2.21)$$

мощность потребителя на k -м участке цепи

$$P_{\text{потр } k} = \frac{A_k}{t}. \quad (2.22)$$

Разделив обе части равенства (2.19) на время t и учитывая формулы (2.21 и 2.22), получим равенство, называемое *балансом мощностей*:

$$P_{\text{ист}} = \sum_{k=1}^n P_{\text{потр } k}. \quad (2.23)$$

Мощность источника $P_{\text{ист}}$. Представим мощность в электрической цепи через ЭДС, напряжения и токи.

Из формулы (2.17), с учетом формулы (2.1) следует

$$A_{\text{ст}} = EQ = EIt.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (2.21), получим

$$P_{\text{ист}} = \frac{A_{\text{ст}}}{t} = \frac{EIt}{t} = EI. \quad (2.24)$$

Таким образом, *мощность постоянного тока, развиваемая источником электрической энергии, равна произведению ЭДС источника на ток, протекающий в источнике.*

Мощность потребителя $P_{\text{потр } k}$ на k -м участке цепи. Аналогичным образом из формулы (2.22), с учетом формулы (1.9) и (2.1) получим

$$P_{\text{потр } k} = \frac{A_k}{t} = \frac{U_k Q}{t} = \frac{U_k It}{t} = U_k I.$$

С учетом формулы (2.5)

$$P_{\text{потр } k} = U_k I = I^2 R. \quad (2.25)$$

Мощность постоянного тока, потребляемая на участке цепи с сопротивлением R , выражается произведением напряжения U_k между концами участка на ток I , протекающий по этому участку, или произведением квадрата тока I на сопротивление участка R .

Единицы измерения мощности и энергии. В Международной системе единиц СИ единицей мощности служит *ватт*:

$$[P] = \frac{[A]}{[t]} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

Один ватт — это мощность, при которой в каждую секунду времени внутри источника совершается работа по разделению зарядов, равная одному джоулю:

$$1 \text{ Вт} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ с}}, \text{ откуда } 1 \text{ Дж} = 1 \text{ Вт} \cdot 1 \text{ с} = 1 \text{ Вт} \cdot \text{с}.$$

Можно сказать и по-другому: 1 Вт — это мощность, при которой в каждую секунду (1 с) 1 Дж электрической энергии преобразуется в другой вид энергии.

С другой стороны, из формулы (2.25) следует

$$[P] = [UL] = \text{В} \cdot \text{А} = \text{Вт}, \text{ т.е. } 1 \text{ Вт} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А}.$$

Один ватт — это мощность, развиваемая постоянным током в 1 А при напряжении 1 В.

Десятичные кратные единицы:

1 гВт (гектоватт) = $1 \cdot 10^2$ Вт; 1 кВт (киловатт) = $1 \cdot 10^3$ Вт; 1 МВт (мегаватт) = $1 \cdot 10^6$ Вт.

Электрическая энергия $W_э$ измеряется соответственно в ватт-часах:

$$[W_э] = \text{Вт} \cdot \text{ч}.$$

Десятичные кратные единицы: гектоватт-час (гВт·ч); киловатт-час (кВт·ч).

Один киловатт-час — это работа, совершаемая в течение 1 ч при мощности 1 кВт:

$$1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 1\,000 \text{ Вт} \cdot \text{ч}; 1 \text{ Вт} \cdot \text{ч} = 3\,600 \text{ Дж}.$$

В киловатт-часах обычно выражают энергию, на которую выставляют счета потребителям электроэнергии.

Коэффициент полезного действия. Известно, что при прохождении тока в электрической цепи силы электрического поля совершают работу в элементах цепи. Электрическая энергия, вырабатываемая источником, затрачивается на преобразование в другие виды энергии, например механическую, тепловую, световую, химическую в зависимости от назначения потребителей.

В связи с этим электрическую мощность, вырабатываемую источником, принято называть *затраченной мощностью* $P_{\text{ист}}$.

Часть мощности источника, затраченная в потребителях на создание других видов энергии, называется *полезной мощностью* $P_{\text{потр}}$.

Вся ли «затраченная мощность» источника является полезной? Нет. Часть мощности источника затрачивается на нагрев проводов. Еще часть мощности источника тратится на нагрев собственного внутреннего сопротивления. Сумма названных мощностей представляет собой *мощность потерь* P_0 .

С учетом сказанного *баланс мощностей* в электрической цепи согласно формуле (2.23) может быть представлен в следующем виде:

$$P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}} + P_0. \quad (2.26)$$

Выражение (2.26) наглядно демонстрирует, что чем больше мощность потерь P_0 , тем меньше мощности источника остается на полезную работу в потребителях. Отсюда следует, что эффективность работы источника зависит от величины мощности потерь.

Эффективность передачи энергии от источника к приемнику характеризуется *коэффициентом полезного действия источника* η .

Коэффициент полезного действия η численно равен отношению полезной мощности к затраченной мощности:

$$\eta = \frac{P_{\text{погр}}}{P_{\text{ист}}} = \frac{P_{\text{погр}}}{P_{\text{погр}} + P_0}. \quad (2.27)$$

Вернемся к вопросу о полезной мощности. Как уже отмечалось, все элементы цепи обладают сопротивлением, а значит, во всех потребителях (не только в нагревательных приборах) часть мощности, переданной потребителю, неизбежно преобразуется в теплоту. Эта «паразитная» мощность входит в состав полезной мощности $P_{\text{погр}}$, так как сопутствует мощности, затраченной по назначению потребителя, и должна быть обеспечена источником.

2.8. Преобразование электрической энергии в тепловую энергию

Закон Джоуля—Ленца. При прохождении электрического тока через цепь в приемниках возможны различные преобразования электрической энергии. Характер преобразования зависит от назначения приемника. Это и нагревание элементов цепи, и химические изменения, и механическая работа и т. д.

Исследуя на опыте нагревание проводников током, Э. Х. Ленц* и Дж. Джоуль** одновременно в 1844 г. установили, что количество теплоты Q , выделяющееся в проводнике при прохождении через него электрического тока, прямо пропорционально сопротивлению R проводника, квадрату тока I и времени t , в течение которого поддерживается ток в проводнике.

Этот закон, носящий название закона Джоуля—Ленца, можно выразить формулой

$$Q = cRI^2t, \quad (2.28)$$

где c — коэффициент пропорциональности.

Численное значение коэффициента c зависит от выбора единиц, в которых производится измерение. Если количество теплоты измеряется в калориях, время — в секундах, сопротивление — в омах, ток — в амперах, то $c = 0,24$.

Одна калория — количество теплоты, необходимое для нагревания 1 г воды на 1°C .

Таким образом, количество теплоты Q , измеренное в калориях, определяется по формуле

$$Q = 0,24RI^2t. \quad (2.29)$$

* Ленц Э. Х. (1804—1865), член Российской Академии наук.

** Дж. Джоуль (1818—1889), английский физик.

Из формулы (2.29) следует, что ток в 1 А выделяет в проводнике, имеющем сопротивление 1 Ом, за 1 с количество теплоты, равное 0,24 кал.

В Международной системе единиц измерения (СИ) количество теплоты измеряется в джоулях, при этом коэффициент $c = 1$.

Таким образом, количество теплоты Q , измеренное в джоулях, определяется по формуле

$$Q = RI^2t. \quad (2.30)$$

В соответствии с формулой (2.29):

$$1 \text{ Дж} = 0,24 \text{ кал, т. е. } 1 \text{ кал} = 4,2 \text{ Дж.}$$

Работа электрического тока и тепловая энергия. Работу A_k , совершаемую электрическими силами при прохождении тока через участок цепи, нетрудно вычислить. Воспользуемся формулами (2.22) и (2.25), из которых следует

$$A_k = P_k t = UIt \text{ Дж} = 0,24UIt \text{ кал.} \quad (2.31)$$

Теперь рассмотрим отдельно два случая:

1) вся электрическая энергия источника преобразуется в тепловую энергию;

2) только часть электрической энергии преобразуется в тепловую энергию.

Следует отметить, что в рассмотренных случаях потребители имеют неодинаковые схемы замещения.

В первом случае потребитель характеризуется только сопротивлением R и может быть им представлен (замещен). Тогда напряжение на зажимах потребителя может быть выражено по закону Ома (см. формулу (2.5)): $U = RI$. Подставив это выражение в формулу (2.31), получим

$$A_k = 0,24I^2Rt \text{ кал.}$$

Правая часть полученного выражения в соответствии с законом Джоуля—Ленца (см. формулу (2.29)) равна количеству теплоты. Следовательно, в рассматриваемом случае: $A_k = Q$.

Во втором случае на теплоту расходуется только часть энергии источника. Остальная энергия расходуется на другие виды энергии в соответствии с назначением потребителя. В этом случае сопротивление R , соответствующее тепловой энергии, является только одной из составляющих схемы замещения потребителя.

Таким образом, во втором случае $A_k > Q$. При этом работу можно вычислять только по формуле (2.31), а количество теплоты — только по закону Джоуля—Ленца (см. формулу (2.29)).

Другими словами, формула $Q = 0,24I^2Rt$ (закон Джоуля—Ленца) для вычисления тепла пригодна во всех случаях, а для вычис-

ления работы электрических сил необходимо учитывать конкретную ситуацию.

Допустимая нагрузка проводов. При протекании тока по проводам они нагреваются. При различии температур провода и среды теплота провода отдается в окружающую среду, причем скорость отдачи тепла пропорциональна разности указанных температур. В начале процесса, при равенстве температур провода и среды, теплота почти не отдается в окружающую среду, а практически вся идет на нагревание провода. Температура провода быстро растет. С ростом температуры провода увеличивается разность температур, вследствие чего увеличивается количество отдаваемой проводом теплоты, и рост температуры провода замедляется. При некоторой температуре устанавливается тепловое равновесие: количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в проводе, равно теплоте, отдаваемой проводом в окружающую среду за такое же время. Такое значение температуры называется *установившимся значением*. Для проводников оно составляет 65... 80 °С.

Температура нагрева проводов допускается до определенных значений $\theta_{\text{доп}}$. У изолированных проводов допустимый нагрев определяется видом и свойствами изоляции, у голых проводов — изменением их механических свойств.

Сила тока, при которой температура нагрева достигает предельно допустимого значения $\theta_{\text{доп}}$, называется *наибольшим допустимым, или номинальным током провода $I_{\text{н}}$ (номинальной нагрузкой)*.

Превышение номинального тока называют *перегрузкой* проводов. Перегрузку можно допустить только кратковременно в течение времени, пока температура провода не достигнет предельно допустимого значения $\theta_{\text{доп}}$.

От теплового действия при перегрузке участки электрической цепи защищают плавкими предохранителями, автоматами или реле.

Плавкие предохранители — это устройства, основной частью которых является вставка — короткий кусок проволоки из легкоплавкого металла. Геометрические размеры вставки (длина и площадь поперечного сечения) рассчитываются таким образом, чтобы вставка плавилась при появлении в цепи тока выше номинального. При этом разрывается цепь, отключая защищаемый участок.

Автоматические устройства и реле в силовых цепях также разрывают цепь, если ток превышает допустимое значение.

2.9. Закон Ома для полной электрической цепи

Закон Ома для электрической цепи с одним источником. Закон, устанавливающий зависимость между током в цепи, ЭДС источ-

ника и сопротивлением в цепи с одним источником, называют *законом Ома для полной цепи*.

Рассмотрим цепь с одним источником и потребителем (рис. 2.8). Составим для нее баланс мощностей (см. формулу (2.26)), учитывая формулы (2.24) и (2.25):

$$EI = I^2 R + I^2 R_0, \text{ или } E = IR + IR_0 = I(R + R_0).$$

Отсюда

$$I = \frac{E}{R + R_0}. \quad (2.32)$$

Таким образом, формулировка закона Ома для электрической цепи с одним источником: *сила тока прямо пропорциональна ЭДС источника и обратно пропорциональна суммарному сопротивлению цепи*.

Из формулы (2.32) следует, что $IR = E - IR_0$. Так как согласно формуле (2.5) $IR = U$, то

$$U = E - IR_0, \quad (2.33)$$

т. е. в цепи с одним источником напряжение на зажимах источника меньше его ЭДС на падение напряжения на его внутреннем сопротивлении.

Закон Ома для электрической цепи с несколькими источниками. На рис. 2.9 показана электрическая цепь, в которой включены два источника ЭДС. Как можно записать закон Ома в этом случае?

Для вывода формулы расчета тока воспользуемся *методом наложения токов*, который следует из *принципа независимости действия ЭДС*. Согласно этому принципу источники питания при создании тока в цепи действуют независимо друг от друга, а сила тока в цепи равна алгебраической сумме частных токов (на рис. 2.9 обозначены штриховой линией) от каждого источника. Этот метод справедлив при условии, что сопротивления всех участков цепи постоянны, не зависят от тока (т. е. цепь линейная).

По закону Ома (см. формулу (2.32)) определяем *частичный ток* I' в цепи от действия только первого источника E_1 :

$$I' = \frac{E_1}{R_{01} + R + R_{02}}.$$

Направление частичного тока I' совпадает с направлением E_1 .

При действии только второго источника E_2 *частичный ток* I'' в цепи

$$I'' = \frac{E_2}{R_{01} + R + R_{02}}.$$

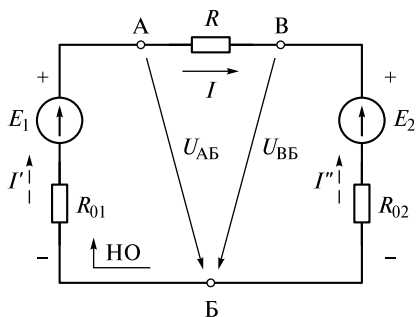


Рис. 2.9. Электрическая цепь с двумя источниками питания

Направление частичного тока I'' совпадает с направлением E_2 .

В цепи (см. рис. 2.9) E_1 и E_2 направлены встречно (навстречу друг другу), поэтому результирующий ток I равен разности частичных токов.

Направление тока при этом совпадает с направлением большей по величине ЭДС. Если $E_1 > E_2$, то ток в цепи совпадает с направлением E_1 (как показано на рис. 2.9):

$$I = I' - I'' = \frac{E_1 - E_2}{R_{01} + R + R_{02}}. \quad (2.34)$$

В общем случае (при любом числе ЭДС в цепи) ток в цепи

$$I = \frac{\sum_{\text{алг}} E}{\sum R}. \quad (2.35)$$

Формула (2.35) выражает закон Ома для неразветвленной цепи с несколькими источниками. Формулировка закона: ток в цепи с несколькими источниками равен алгебраической сумме ЭДС, деленной на сумму сопротивлений цепи, включая внутренние сопротивления источников.

Алгебраическая сумма ЭДС в формуле (2.35) означает, что ЭДС, направленные согласно (в одну сторону) с выбранным направлением обхода (НО) цепи, записываются в формуле с одним знаком, направленные навстречу выбранному обходу — с другим.

Направление тока в цепи определяет та группа согласно включенных источников (с одинаковыми направлениями ЭДС), которая имеет большую суммарную ЭДС.

Электродвижущая сила, направленная встречно току, называется *встречной*, или *противоЭДС*. Примером противоЭДС является E_2 на рис. 2.9.

Два режима работы источников в цепи с несколькими ЭДС. Очевидно, что возможно только два варианта включения источ-

ников: направление ЭДС источника или совпадает с направлением тока, или не совпадает. В соответствии с этим рассматривают два режима работы источников: режим генератора и режим потребителя.

Если направление ЭДС источника совпадает с направлением тока, проходящего через него, источник работает в режиме генератора.

Если ЭДС источника направлена встречно току, источник работает в режиме потребителя.

В электрической цепи (см. рис. 2.9) источник E_1 работает в режиме генератора, а источник E_2 — в режиме потребителя. Выведем формулы вычисления напряжений на зажимах источников, работающих в режимах генератора и потребителя.

Напряжение на зажимах источника, работающего в режиме генератора, можно определить из баланса мощностей (см. формулу (2.26)). При составлении баланса учтем, что электрическая энергия, которую вырабатывает источник E_1 , преобразуется в другие виды энергии на внешнем участке АБ цепи и преобразуется в тепло на внутреннем сопротивлении самого источника R_{01} .

Таким образом, на участке АБ баланс мощностей может быть представлен в следующем виде:

$$P_{\text{ист1}} = P_{\text{АБ}} + P_{01}, \text{ или } E_1 I = U_{\text{АБ}} I + I^2 R_{01},$$

откуда следует

$$U_{\text{АБ}} = E_1 - I R_{01}. \quad (2.36)$$

Напряжение на зажимах источника в режиме генератора меньше его ЭДС на значение падения напряжения на внутреннем сопротивлении источника.

Напряжение на зажимах источника, работающего в режиме потребителя. Мощность $P_{\text{АБ}} = U_{\text{АБ}} I$ источника E_1 , затрачиваемая на внешнем участке АБ цепи, состоит из двух частей.

Первая часть (затрачиваемая на участке АВ), которую можно представить как $P_{\text{АВ}} = U_{\text{АВ}} I$, преобразуется в теплоту на сопротивлении R .

Вторая часть (затрачиваемая на участке ВБ), которую можно представить как $P_{\text{ВБ}} = U_{\text{ВБ}} I$, расходуется, во-первых, на преодоление действия противоЭДС источника E_2 , а во-вторых, на преобразование в теплоту на внутреннем сопротивлении R_{02} источника E_2 .

При этом в зависимости от физической природы противоЭДС источника E_2 происходит преобразование электрической энергии в химическую энергию — в аккумуляторе или механическую энергию — в электрическом двигателе.

Составив баланс мощностей (2.26) для участка ВБ, можно определить напряжение на зажимах источника в режиме потребителя:

$$U_{ВБ}I = P_{ист2} + P_{02} = E_2I + I^2R_{02},$$

откуда следует

$$U_{ВБ} = E_2 + IR_{02}. \quad (2.37)$$

Напряжение на зажимах источника в режиме потребителя больше его ЭДС на падение напряжения на внутреннем сопротивлении источника.

2.10. Источники ЭДС и тока

Источник ЭДС. Источником ЭДС называют источник энергии, характеризующийся наличием ЭДС и внутреннего сопротивления, значение которого много меньше сопротивления внешнего участка цепи ($R_0 \ll R$), настолько, что сопротивлением R_0 практически можно пренебречь.

Большинство источников энергии, используемых на практике для питания электрических цепей (аккумуляторы, электромашинные генераторы и др.), удовлетворяют этому условию.

Причины возникновения ЭДС и природа внутреннего сопротивления источников рассмотрены в подразд. 2.5 и 2.6 соответственно, а схема замещения такого источника представлена на рис. 2.8 как последовательное соединение ЭДС и R_0 .

С энергетической точки зрения ЭДС источника обеспечивает ток в цепи и энергию в потребителях, а внутреннее сопротивление характеризует потери энергии в самом источнике. Чем меньше внутреннее сопротивление источника, тем меньше потери энергии внутри него.

Источники ЭДС без внутреннего сопротивления ($R_0 \approx 0$) называют *идеальными источниками ЭДС*, или *источниками заданного напряжения*. Напряжение на зажимах такого источника в соответствии с формулой (2.33) и учетом условия $R_0 \approx 0$:

$$U = E - IR_0 \approx E = \text{const.}$$

Реальный источник ЭДС, у которого $0 < R_0 \ll R$, практически можно считать источником заданного напряжения.

Ток в цепи с источником ЭДС (см. рис. 2.8) в соответствии с формулой (2.32) и учетом условия $R_0 \ll R$ ($R_0 \approx 0$ по сравнению с R) зависит только от сопротивления нагрузки — внешнего участка цепи R :

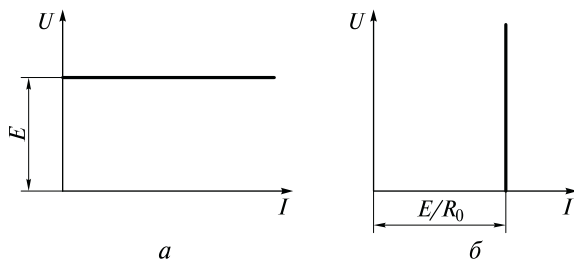


Рис. 2.10. Вольт-амперная характеристика идеальных источников энергии: *a* — источника ЭДС; *б* — источника тока

$$I = E/(R_0 + R) \approx E/R.$$

Вольт-амперная (внешняя) характеристика источника ЭДС имеет вид, представленный на рис. 2.10, *a*.

Источник тока. Источником тока называют источник энергии, характеризующийся наличием ЭДС и внутреннего сопротивления, значение которого много больше сопротивления внешнего участка цепи ($R_0 \gg R$), настолько, что сопротивлением R практически можно пренебречь.

Источники энергии с большими внутренними сопротивлениями, создаваемые на базе полупроводников, применяются в таких областях техники, как электроника, радиотехника, приборостроение.

Если схему замещения источника тока представить аналогично источнику ЭДС (последовательное соединение ЭДС и R_0 , как на рис. 2.8), то при условии $R_0 \gg R$ согласно формуле (2.32) ток в цепи

$$I = E/(R_0 + R) \approx E/R_0 = \text{const},$$

т.е. ток в цепи с источником тока практически является постоянной величиной и не зависит от сопротивления внешнего участка R .

Идеальный источник тока. В идеальном случае, когда $R_0 \rightarrow \infty$, источник тока называют *идеальным источником тока*.

Схема замещения, принятая для источника ЭДС, когда внутреннее сопротивление включается последовательно с его ЭДС, не имеет смысла для идеального источника тока, так как при последовательном соединении $R_0 \rightarrow \infty$ и R очевиден разрыв в цепи при любых значениях R и отсутствие тока в ней, что не отражает физического смысла процесса.

Чтобы отобразить постоянство создаваемого источником тока, идеальный источник тока обозначают на схемах кружком с двойной стрелкой с разрывом внутри и буквенным обозначением создаваемого им тока J , не зависящего от сопротивления нагрузки R :

Источник тока

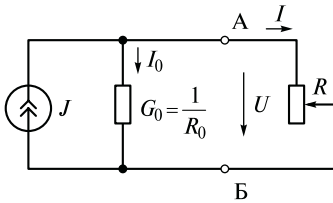


Рис. 2.11. Схема замещения электрической цепи с источником тока

$$J = E/R_0 = EG_0.$$

Введение разрыва подчеркивает, что внутреннее сопротивление идеального источника равно бесконечности (разрыв).

На рис. 2.10, б представлена вольт-амперная (внешняя) характеристика идеального источника тока.

Реальный источник тока имеет конечное значение R_0 , хотя и значительно превышающее сопротивление нагрузки: $R \ll R_0 < \infty$. Что-

бы отобразить внутренние потери энергии источника, характеризуемые внутренним сопротивлением R_0 , *реальный источник тока принято обозначать параллельным соединением идеального источника тока и внутренней проводимости источника* ($G_0 = 1/R_0$), как показано на рис. 2.11. Внутренняя проводимость обеспечивает учет причин изменения внешнего тока I (на внешнем участке цепи) при изменении нагрузки R_n источника тока.

Эквивалентные преобразования источников тока и ЭДС. Замена считается эквивалентной, если мощность, отдаваемая источником в нагрузку, одинакова в источнике тока и источнике ЭДС, т. е. в обоих случаях в нагрузке протекают одинаковые токи при одинаковых напряжениях на ней.

Идеальные источники тока ($G_0 = 0$, $J = I = EG_0$) и ЭДС ($R_0 = 0$, $U = E$) можно эквивалентно заменить друг другом только теоретически.

Так, идеальный источник тока (внутренняя проводимость источника тока $G_0 = 0$) можно заменить эквивалентным источником напряжения с ЭДС $E_3 = J/G_0 = J/0 \rightarrow \infty$. Но на практике источник с ЭДС бесконечно большой величины невозможно выполнить.

Аналогично идеальный источник ЭДС можно заменить источником тока, у которого сила тока равна бесконечности: $J_3 = E/R_0 = E/0 \rightarrow \infty$, что также практически нельзя осуществить.

В реальном случае такую замену можно осуществить на практике, так как величины G_0 и R_0 , характеризующие потери энергии внутри источников, отличны от нуля и E_3 и J_3 имеют конечные значения.

При этом эквивалентный источник тока имеет параметры:

$$J_3 = E/R_0 \neq \infty \text{ и } G_0 = 1/R_0 \neq 0,$$

а эквивалентный источник ЭДС:

$$E_3 = J/G_0 \neq \infty \text{ и } R_{0_3} = 1/G_0 \neq 0.$$

2.11. Режимы работы электрической цепи

Рабочие параметры электрической цепи. Рассмотрим электрическую цепь постоянного тока с одним источником энергии и переменным сопротивлением внешнего участка. К такому виду можно привести практически любую реальную электрическую цепь. Схема исследуемой электрической цепи представлена на рис. 2.12, а.

Работу электрической цепи характеризуют следующие параметры: сила тока I , мощность источника $P_{\text{ист}}$, мощность приемника $P_{\text{потр}}$, мощность потерь на внутреннем сопротивлении генератора P_0 , КПД источника η .

Значения рабочих параметров определяются формулами (2.24)... (2.27), (2.32):

сила тока в цепи

$$I = \frac{E}{R + R_0};$$

мощность источника

$$P_{\text{ист}} = EI;$$

мощность потребителя

$$P_{\text{потр}} = UI = I^2 R;$$

мощность потерь

$$P_0 = P_{\text{ист}} - P_{\text{потр}};$$

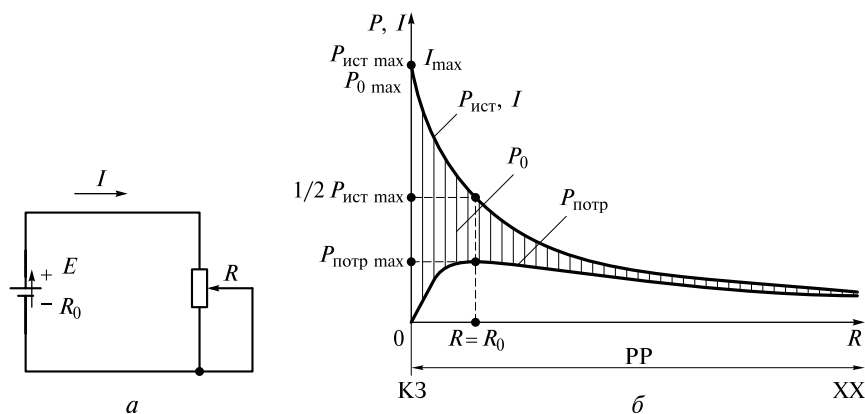


Рис. 2.12. Электрическая цепь с переменным сопротивлением:

а — схема цепи; б — графики изменения $P_{\text{ист}}$, $P_{\text{потр}}$, I , P_0 от R

КПД источника

$$\eta = \frac{P_{\text{потр}}}{P_{\text{ист}}} 100.$$

На рис. 2.12, б показаны графики изменения рабочих параметров цепи при изменении сопротивления внешнего участка цепи в пределах $0 \leq R \leq \infty$, построенные по представленным ранее формулам.

Отрезки вертикальных прямых между кривыми $P_{\text{ист}}$ и $P_{\text{потр}}$ на рис. 2.12, б (разность ординат $P_{\text{ист}}$ и $P_{\text{потр}}$ для конкретных значений сопротивлений R) в соответствии с формулой (2.26) представляют собою значения мощностей потерь P_0 .

Режимы работы электрической цепи в зависимости от значения сопротивления внешнего участка R . В рассматриваемой цепи в зависимости от значения R выделяют три режима работы:

- $R = 0$ — режим короткого замыкания (КЗ).
- $R = \infty$ (обрыв в цепи) — режим холостого хода (ХХ).
- $0 < R < \infty$ — рабочий режим (РР).

Рассмотрим особенности каждого из указанных режимов работы.

Режим короткого замыкания ($R = 0$):

- сила тока в цепи

$$I_{\text{КЗ}} = \frac{E}{R + R_0} = \frac{E}{R_0} = I_{\text{max}}.$$

Сила тока $I_{\text{КЗ}}$ в цепи принимает максимальное значение I_{max} . При этом, чем меньше значение R_0 , тем больше значение I_{max} ;

- мощность источника

$$P_{\text{ист КЗ}} = EI_{\text{КЗ}} = EI_{\text{max}} = P_{\text{ист max}}.$$

Мощность источника $P_{\text{ист КЗ}}$ максимальна. Чем меньше значение R_0 , тем больше значения I_{max} , а следовательно, и $P_{\text{ист max}}$;

- мощность потребителя

$$P_{\text{потр КЗ}} = I_{\text{КЗ}}^2 R = I_{\text{КЗ}}^2 \cdot 0 = 0;$$

- мощность потерь $P_{0 \text{ КЗ}}$ на внутреннем сопротивлении источника

$$P_{0 \text{ КЗ}} = P_{\text{ист КЗ}} - P_{\text{потр КЗ}} = P_{\text{ист max}} - 0 = P_{\text{ист max}}.$$

Полученные значения соответствуют значениям интересующих нас параметров на графиках (см. рис. 2.12, б).

Как мы видим, мощность потерь $P_{0 \text{ КЗ}}$ на внутреннем сопротивлении источника равна максимальной мощности источника $P_{\text{ист max}}$.

Таким образом, в режиме КЗ максимальная мощность, вырабатываемая источником, полностью выделяется на внутреннем сопротивлении источника R_0 . При этом никакой полезной работы не производится: $P_{\text{потр КЗ}} = 0$. Это самый неблагоприятный, мало того, опасный для источника режим работы.

Режим холостого хода ($R = \infty$):

- сила тока в цепи $I_{\text{ХХ}}$ равна нулю,

$$I_{\text{ХХ}} = \frac{E}{R + R_0} = \frac{E}{\infty} = 0;$$

- мощность источника $P_{\text{ист ХХ}}$ равна нулю, так как $I_{\text{ХХ}} = 0$,

$$P_{\text{ист ХХ}} = EI_{\text{ХХ}} = 0;$$

- мощность потребителя $P_{\text{потр ХХ}}$ равна нулю, так как $I_{\text{ХХ}} = 0$,

$$P_{\text{потр ХХ}} = U_{\text{ХХ}}I_{\text{ХХ}} = U_{\text{ХХ}} \cdot 0 = 0.$$

Кроме того, $P_{\text{потр ХХ}} = P_{\text{ист ХХ}}$, так как согласно формуле (2.33) $U_{\text{ХХ}} = E$;

- мощность потерь $P_{0 \text{ ХХ}}$ равна нулю,

$$P_{0 \text{ ХХ}} = P_{\text{ист ХХ}} - P_{\text{потр ХХ}} = 0.$$

Таким образом, при достаточно больших значениях R в режиме, близком к холостому ходу, источник вырабатывает относительно маленькую мощность, однако она целиком расходуется в потребителе ($P_{\text{потр ХХ}}$ практически равна $P_{\text{ист ХХ}}$). Мощность потерь, $P_{0 \text{ ХХ}}$, при этом практически равна нулю. Это хорошо видно на рис. 2.12, б.

Рабочий режим ($0 < R < \infty$):

- сила тока в цепи $I_{\text{РР}}$ и мощность источника $P_{\text{ист РР}}$ при значениях сопротивления R в указанном диапазоне согласно формулам (2.32) и (2.24) находятся в диапазонах

$$0 < I_{\text{РР}} < I_{\text{max}} \text{ и } 0 < P_{\text{ист РР}} < P_{\text{ист max}}.$$

Значения $I_{\text{РР}}$ и $P_{\text{ист РР}}$ уменьшаются с увеличением значения R ;

- мощность потребителя $P_{\text{потр РР}}$ находится в диапазоне

$$0 < P_{\text{потр РР}} < P_{\text{ист РР}}.$$

Соотношение $P_{\text{потр РР}} > 0$ очевидно, так как $R > 0$ и $I_{\text{РР}} > 0$.

Соотношение $P_{\text{потр РР}} < P_{\text{ист РР}}$ справедливо, так как при $I_{\text{РР}} > 0$ и $R_0 > 0$ согласно формуле (2.33) напряжение на потребителе меньше ЭДС источника R_0 на значение падения напряжения на внутреннем сопротивлении источника, т.е. $U < E$.

Кроме того, мощность $P_{\text{потр РР}}$ с увеличением сопротивления R сначала растет, проходит через максимум при определенном

значении R , а затем уменьшается. При этом во всех точках рабочего режима мощность $P_{\text{потр}} R$ меньше мощности $P_{\text{ист}} R$ на значение $P_0 R$;

- мощность потерь на внутреннем сопротивлении источника

$$P_0 R = P_{\text{ист}} R - P_{\text{потр}} R > 0.$$

Режим согласованной нагрузки (СН). Анализ влияния значения R на значение $P_{\text{потр}}$ показывает, что в двух предельных режимах (КЗ и ХХ) мощность потребителя равна нулю ($P_{\text{потр}} = 0$), а в диапазоне рабочих точек она больше нуля: $P_{\text{потр}} R > 0$. Из математики известно, что если какая-то функция в двух крайних точках интервала аргумента имеет нулевые значения, а в промежуточных точках отлична от нуля, то исследуемая функция имеет максимум. Таким образом, мощность потребителя $P_{\text{потр}}$ имеет максимум.

Режим работы цепи, при котором в потребителе выделяется максимальная мощность, называется *режимом согласованной нагрузки*.

Определим значение сопротивления нагрузки R , при котором $P_{\text{потр}} = P_{\text{потр max}}$.

Аналитическое обоснование условия получения максимальной мощности в потребителе. Составим уравнение зависимости $P_{\text{потр}}$ от R :

$$P_{\text{потр}} = I^2 R = \left(\frac{E}{R + R_0} \right)^2 R = \frac{E^2 R}{(R + R_0)^2}.$$

Определим первую производную зависимости $P_{\text{потр}}$ от R и приравняем ее нулю:

$$\frac{dP_{\text{потр}}}{dR} = E^2 \frac{(R + R_0)^2 - 2R(R + R_0)}{(R + R_0)^4} = E^2 \frac{R_0 - R}{(R + R_0)^3} = 0.$$

Из полученного выражения следует:

$$R_0 - R = 0 \text{ или } R = R_0.$$

Таким образом, $P_{\text{потр}} = P_{\text{потр max}}$ при условии, что $R = R_0$.

Это равенство и обусловило название «режим согласованной нагрузки»: если сопротивление нагрузки согласовано с внутренним сопротивлением источника (равно ему), то нагрузка получает от источника максимально возможное количество электрической энергии.

Режим работы, характеризующийся значением сопротивления $R = R_0$, входящим в диапазон рабочего режима, выделен в отдельный режим из-за особенных значений рабочих параметров.

Особенности режима согласованной нагрузки. Подставив значение $R = R_0$ в приведенные ранее формулы определения значений рабочих параметров, получим следующие соотношения:

- $I_{\text{СН}} = 1/2 I_{\text{max}}$;
- $P_{\text{ист СН}} = 1/2 P_{\text{ист max}}$;
- $P_{\text{потр СН}} = P_{\text{потр max}}$, где $P_{\text{потр max}} = 1/2 P_{\text{ист СН}} = 1/4 P_{\text{ист max}}$;
- $P_0 \text{ СН} = P_{\text{ист СН}} - P_{\text{потр СН}} = 1/2 P_{\text{ист СН}} = P_{\text{потр max}}$.

Таким образом, в режиме согласованной нагрузки, когда в потребителе выделяется максимальная мощность, источник вырабатывает только половину своей максимальной мощности. И только половина от нее потребляется нагрузкой, вторая половина расходуется на внутреннем сопротивлении самого источника, т.е. максимальное значение мощности, которую нагрузка может получать от источника, составляет всего $1/4$ от максимальной мощности источника.

КПД источника. Значения коэффициентов полезного действия для рассмотренных режимов работы получим из формулы (2.27):

- в режиме короткого замыкания

$$\eta_{\text{КЗ}} = \frac{P_{\text{потр}}}{P_{\text{ист}}} 100 = \frac{0}{P_{\text{ист max}}} 100 = 0 \%;$$

- в рабочем режиме

$$\eta_{\text{РР}} > 0, \text{ так как } P_{\text{потр РР}} > 0 \text{ и } P_{\text{ист РР}} > 0;$$

- в режиме холостого хода

$$\eta_{\text{ХХ}} = \frac{P_{\text{потр}}}{P_{\text{ист}}} = \frac{P_{\text{ист}}}{P_{\text{ист}}} 100 = 100 \%;$$

- в режиме согласованной нагрузки

$$\eta_{\text{СН}} = \frac{P_{\text{потр}}}{P_{\text{ист}}} = \frac{1/2 P_{\text{ист}}}{P_{\text{ист}}} 100 = 50 \%.$$

В каких случаях выбирают режим потребления максимальной мощности, а в каких — режим получения максимального КПД? Как видно из полученных результатов, КПД источника изменяется в диапазоне от 0 до 100%. При этом максимальная мощность потребления соответствует КПД источника $\eta_{\text{СН}} = 50\%$. Когда же КПД источника равен максимальному значению (100%), источник вырабатывает, а потребитель получает минимальную мощность, близкую к нулю. Из приведенного анализа следует, что при выборе режима работы цепи целесообразно учитывать уровень мощности цепи.

В *маломощных цепях* в нагрузке целесообразно выделять максимальную мощность. Она составляет только 50 % мощности, вырабатываемой источником. Это небольшая мощность, но максимум того, что можно выделить в нагрузке цепи. КПД, равный 50 %, можно получить путем согласования нагрузки цепи R с внутренним сопротивлением источника R_0 .

В *мощных цепях* отдают предпочтение режиму, близкому к холостому ходу. При большом сопротивлении нагрузки (по сравнению с внутренним сопротивлением источника) источник вырабатывает небольшую мощность (относительно максимальной мощности источника), но практически вся эта мощность без потерь потребляется нагрузкой, КПД источника близок к 100 %.

Номинальный режим. Это режим работы, при котором ток, напряжение и мощность того или иного элемента цепи равны его номинальным значениям.

Как источники питания, так и приемники электрической энергии характеризуются *номинальными значениями параметров* (см. подразд. 2.8). К ним относятся:

- номинальный ток I_n , который при длительном прохождении по цепи вызывает предельно допустимое нагревание элементов цепи;
- номинальное напряжение U_n , на которое рассчитан и изготовлен источник или приемник;
- номинальная мощность $P_n = I_n U_n$.

Номинальные величины и их значения указывают на щитке или в паспорте устройства.

Нормальный режим. Это режим работы, при котором ток, напряжение и мощность элемента цепи лежат в заданных диапазонах и не превосходят номинальных значений.

2.12. Расчет потенциалов точек электрической цепи

Для разработки электрических цепей электротехнических устройств с заданными характеристиками важно знать, как рассчитывать потенциалы точек цепей. Значения потенциалов в точках электрической цепи характеризуют ее энергетическое состояние. На практике по значениям потенциалов в характерных точках электрических цепей электротехнических устройств радиотехники, автоматики, техники связи и бытовой техники судят об их исправности. Наличие таких сведений облегчает ремонт и отладку электрических цепей электротехнических устройств.

Методика расчета потенциалов точек электрической цепи. Эта методика состоит из двух частей:

- расчета напряжений между любыми двумя точками цепи;

- вычисления потенциалов точек цепи по известным напряжениям между точками.

Расчет напряжений между характерными точками цепи. Характерными точками цепи являются точки на концах таких элементов цепи, на которых происходит заметное изменение потенциала: сопротивлениях и источниках энергии. Изменением потенциала на соединительных проводниках пренебрегают из-за малости.

Напряжение между характерными точками цепи легко рассчитать по формулам (2.5), (2.36) и (2.37). При этом:

- если между точками цепи (например, А и Б) включено сопротивление $R_{БА}$, то напряжение $U_{БА}$ определяется по закону Ома для участка цепи (см. формулу (2.5)):

$$U_{БА} = R_{БА}I;$$

- если между точками цепи (например, А и Б) включен источник ЭДС с параметрами E и R_0 , то напряжение $U_{БА}$ зависит от режима работы источника:

источник в режиме генератора (см. формулу (2.36)):

$$U_{БА} = E - IR_0;$$

источник в режиме потребителя (см. формулу (2.37)):

$$U_{БА} = E + IR_0.$$

В приведенных формулах I — сила тока, протекающего между точками А и Б.

Вычисление потенциалов точек цепи по напряжениям между точками. Для вычисления потенциалов точек воспользуемся фактом, что согласно формуле (1.15) напряжение между любыми двумя точками цепи равно разности потенциалов между этими точками. Например, если концы какого-либо участка электрической цепи обозначены буквами А и Б и $\varphi_B > \varphi_A$, то $U_{БА} = \varphi_B - \varphi_A$.

Таким образом, для расчета разности потенциалов между любыми двумя точками цепи достаточно рассчитать напряжение между ними.

Зная разность потенциалов (напряжение) между точками цепи, можно приступить к расчету потенциалов точек.

Для этого необходимо:

- произвести корректную запись разности сравниваемых потенциалов;

- выбрать уровень отсчета.

Корректная запись разности потенциалов предполагает запись типа: от большего потенциала вычесть меньший потенциал.

Для выявления большего потенциала необходимо:

на участках с сопротивлениями учитывать направление тока: ток в сопротивлении течет от точки с более высоким потенциалом к точке с более низким потенциалом;

на участках с источниками учитывать факт, что более высокий потенциал имеет положительный зажим источника независимо от того, в каком режиме (генератора или потребителя) работает источник.

Задача вычисления потенциалов точек легко решается, если учесть высказанные ранее соображения об относительности величины потенциала, зависимости его значения от выбранного уровня отсчета (см. подразд. 1.2).

Примем потенциал одной из точек исследуемой цепи (для примера обозначим точку буквой А) за уровень отсчета: общую точку.

Для удобства вычислений потенциал общей точки приравняют нулю.

В реальных электротехнических устройствах точку цепи с нулевым потенциалом иногда присоединяют к заземляющему проводу устройства (см. обозначение на рис. 2.13) или к корпусу устройства (\perp).

Считая потенциал точки А известным, можно по формуле (1.15) определить потенциал следующей по обходу цепи точки (обозначим ее буквой Б), зная напряжение между точками А и Б.

Если $\varphi_B > \varphi_A$, напряжение $U_{BA} = \varphi_B - \varphi_A$, и потенциал:

$$\varphi_B = U_{BA} + \varphi_A.$$

Если $\varphi_A > \varphi_B$, напряжение $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$, и потенциал:

$$\varphi_B = \varphi_A - U_{AB}.$$

Зная потенциал точки Б (φ_B), аналогичным образом определяем потенциал следующей точки по обходу цепи до завершения обхода.

Расчет завершается вычислением потенциала исходной точки для проверки правильности произведенного расчета. Если рассчитанный потенциал исходной точки отличается от принятого уровня отсчета, то в расчете были допущены ошибки.

Таким образом, потенциал каждой следующей точки по обходу цепи определяется из условия, что потенциал предыдущей точки известен.

Потенциальная диаграмма. Это график изменения потенциалов на участках цепи от сопротивления участков.

Построение потенциальной диаграммы. Потенциальная диаграмма строится для наглядности и удобства анализа значений потенциалов на участках цепи.

При построении потенциальной диаграммы сопротивления участков откладываются по оси X одно за другим по направле-

нию обхода цепи (*обход цепи можно выбрать по желанию — по направлению тока или против него*). Таким образом, ось X оказывается линейной разверткой сопротивлений замкнутой цепи, а суммарное сопротивление на оси X равно общему сопротивлению цепи.

Особенности потенциальной диаграммы.

Потенциальная диаграмма замкнутой цепи замкнута, т.е. потенциал одинаков для начальной и конечной точек диаграммы, соответствующих одной и той же точке цепи.

Потенциальная диаграмма незамкнутой цепи разомкнута.

Согласно формулам (2.5), (2.36) и (2.37) отрезки диаграммы на всех участках цепи представляют собой прямые линии.

Прямые линии, соответствующие участкам с сопротивлениями, параллельны между собой — имеют одинаковые углы наклона к оси X . Дело в том, что согласно выражению (2.5) тангенсы углов наклона прямых на всех участках с сопротивлениями равны силе тока I , а сила тока одинакова во всех участках неразветвленной цепи.

На участках цепи, содержащих источники, наблюдается резкое изменение потенциала: скачки потенциалов на относительно небольших сопротивлениях источников.

На участках с источниками ЭДС линии диаграммы в общем случае не параллельны между собой.

По виду потенциальной диаграммы можно изобразить схему электрической цепи.

Если потенциальная диаграмма построена в масштабе, по ней можно определить параметры элементов цепи, значение и направление тока в цепи и напряжения между любыми ее точками как разность потенциалов между ними.

Пример 2.8. На рис. 2.13 представлена схема замещения неразветвленной электрической цепи с несколькими источниками ЭДС. Значения параметров цепи: $E_1 = 10$ В; $E_2 = 60$ В; $E_3 = 30$ В; $R_1 = 100$ Ом; $R_2 = 40$ Ом; $R_3 = R_4 = 20$ Ом; $R_{01} = R_{03} = 10$ Ом; значением R_{02} пренебрегаем. Рассчитать потенциалы точек рассматриваемой электрической цепи.

Решение. Для заданной цепи сила тока рассчитывается по закону Ома для полной цепи с несколькими источниками ЭДС (см. формулу (2.35)):

$$I = \frac{\sum_{\text{алг}} E}{\sum R} = \frac{E_2 - E_1 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_{01} + R_{02} + R_{03}} =$$

$$= \frac{60 - 10 - 30}{100 + 40 + 20 + 20 + 10 + 0 + 10} = 0,1 \text{ А.}$$

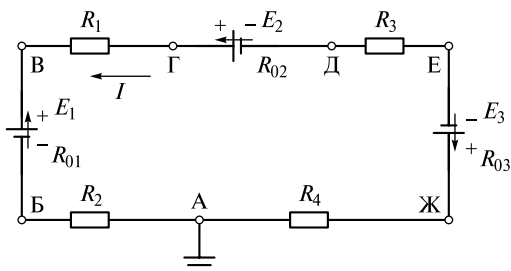


Рис. 2.13. Электрическая цепь с несколькими источниками ЭДС

Направление тока в цепи определяется направлением ЭДС источника E_2 , так как значение E_2 превышает сумму значений ЭДС согласно включенных источников E_1 и E_3 .

Режимы работы источников в цепи: E_2 — генератор, так как направление E_2 совпадает с направлением тока; E_1 и E_3 — потребители, так как направлены навстречу току.

Расчет потенциалов точек:

а) φ_A (потенциал точки А) принимаем за уровень отсчета: $\varphi_A = 0$;

б) $\varphi_B = ?$

Между точками А и Б включен участок с сопротивлением R_2 . Так как ток в цепи протекает от точки Б к точке А, то $\varphi_B > \varphi_A$. Учитывая формулы (1.15) и (2.5), запишем

$$U_{BA} = \varphi_B - \varphi_A = IR_2,$$

откуда следует

$$\varphi_B = \varphi_A + IR_2 = 0,1 \cdot 40 = 4 \text{ В};$$

в) $\varphi_B = ?$

Между точками Б и В включен участок с источником E_1 , работающим в режиме потребителя. Так как точкой В обозначен положительный зажим источника, то $\varphi_B > \varphi_B$. Учитывая формулу (2.37), запишем

$$\varphi_B - \varphi_B = E_1 + IR_{01},$$

откуда следует

$$\varphi_B = \varphi_B + E_1 + IR_{01} = 4 + 10 + 0,1 \cdot 10 = 15 \text{ В};$$

г) $\varphi_\Gamma = ?$

Между точками В и Г включен участок с сопротивлением R_1 . Так как ток на участке протекает от точки Г к точке В, то $\varphi_\Gamma > \varphi_B$, поэтому

$$\varphi_\Gamma - \varphi_B = IR_1,$$

откуда получаем

$$\varphi_{\Gamma} = \varphi_{\text{В}} + IR_1 = 15 + 0,1 \cdot 100 = 25 \text{ В};$$

д) $\varphi_{\text{Д}} = ?$

Между точками Γ и Д включен участок с источником E_2 , работающим в режиме генератора. Учитывая, что положительный зажим источника E_2 обозначен точкой Γ , запишем $\varphi_{\Gamma} > \varphi_{\text{Д}}$.

Согласно формуле (2.36)

$$\varphi_{\Gamma} - \varphi_{\text{Д}} = E_2 - IR_{02},$$

откуда следует

$$\varphi_{\text{Д}} = \varphi_{\Gamma} - E_2 + IR_{02} = 25 - 60 + 0,1 \cdot 0 = -35 \text{ В};$$

е) $\varphi_{\text{Е}} = ?$

На участке с сопротивлением R_3 :

$$\varphi_{\text{Е}} > \varphi_{\text{Д}}; \varphi_{\text{Е}} - \varphi_{\text{Д}} = IR_3,$$

откуда имеем

$$\varphi_{\text{Е}} = \varphi_{\text{Д}} + IR_3 = -35 + 0,1 \cdot 20 = -33 \text{ В};$$

ж) $\varphi_{\text{Ж}} = ?$

На участке с источником E_3 , работающем в режиме потребителя:

$$\varphi_{\text{Ж}} > \varphi_{\text{Е}}; \varphi_{\text{Ж}} - \varphi_{\text{Е}} = E_3 + IR_{03},$$

откуда следует

$$\varphi_{\text{Ж}} = \varphi_{\text{Е}} + E_3 + IR_{03} = -33 + 30 + 0,1 \cdot 10 = -2 \text{ В};$$

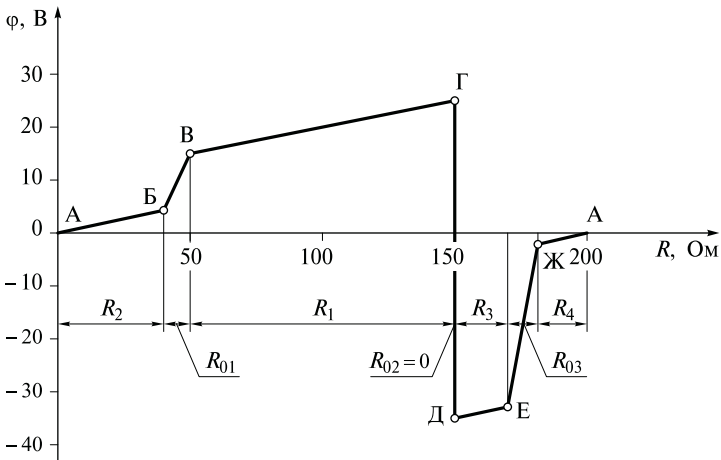


Рис. 2.14. Потенциальная диаграмма электрической цепи

з) $\varphi_A = ?$ (потенциал точки А рассчитываем для проверки правильности расчета).

На участке с сопротивлением R_4 :

$$\varphi_A > \varphi_{\text{Ж}}, \varphi_A - \varphi_{\text{Ж}} = IR_4,$$

откуда получаем

$$\varphi_A = \varphi_{\text{Ж}} + IR_4 = -2 + 0,1 \cdot 20 = 0.$$

Таким образом, мы убедились в правильности проведенных расчетов.

Потенциальная диаграмма, построенная по результатам расчета для примера 2.8, представлена на рис. 2.14. Ее анализ подтверждает описанные ранее особенности потенциальных диаграмм.

Контрольные вопросы

1. Что такое электрический ток и каково его направление? Чему равна сила тока и в каких единицах ее измеряют? Чем отличается постоянный ток от переменного?

2. Что представляют собой источники электрической энергии и каково их назначение?

3. Дайте определение понятия «электрическое сопротивление» и назовите единицы его измерения.

4. Представьте формулу зависимости сопротивления проводника от его геометрических размеров. В какой зависимости находится сопротивление проводника от температуры?

5. Что называют электрической цепью? Какие элементы входят в состав электрических цепей и какова их роль?

6. Что представляет собой схема электрической цепи и ее назначение? Чем отличается схема замещения электрической цепи от схемы электрической цепи?

7. Что называют «электродвижущей силой» источника электрической энергии? Чем отличается ЭДС от напряжения источника?

8. Как вычислить количество теплоты, выделяющейся на любом участке цепи? Каково соотношение между единицами измерения работы сил электрического поля и количества теплоты?

9. Сформулируйте закон Ома для участка цепи и для полной цепи с одним и несколькими источниками электрической энергии.

10. Какие два режима работы источников электрической энергии возможны в электрических цепях? Сформулируйте баланс мощностей для цепи с несколькими источниками.

11. Назовите режимы работы электрической цепи, условия их получения и особенности каждого режима.

12. Что представляет собой потенциальная диаграмма и каково ее значение?

Глава 3

РАСЧЕТ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

3.1. Законы Кирхгофа

Простые и сложные электрические цепи. Ранее рассматривались цепи, состоящие из одного или нескольких источников и приемников электрической энергии, соединенных таким образом, что по ним протекает один и тот же ток. Такое соединение элементов называют *последовательным*.

Цепи, содержащие последовательное соединение элементов, принято называть *неразветвленными*. Для расчета силы тока в них используют закон Ома. Такие цепи относят к *простым цепям*.

Цепи, содержащие разветвления, называют *разветвленными*.

Разветвленные цепи с одним источником электрической энергии легко преобразуются в неразветвленные цепи (см. подразд. 3.2). Их также относят к простым цепям.

Разветвленные цепи с источниками в разных разветвленных участках (в двух или более) называют *сложными*. На рис. 3.1 показан пример схемы сложной разветвленной электрической цепи.

Основными законами для расчета токов в разветвленных цепях являются первый и второй законы Кирхгофа, рассматриваемые далее.

Основные понятия разветвленных цепей — это ветвь, узел, контур.

Ветвь — участок электрической цепи между двумя соседними разветвлениями, состоящий из одного элемента или нескольких последовательно соединенных элементов.

В ветвях разветвленной цепи протекают отличные друг от друга токи. Например, в шести ветвях цепи (см. рис. 3.1) протекает шесть разных токов: $I_1 \dots I_6$. Но в каждой отдельной ветви по всем ее элементам протекает один и тот же ток. Например, в ветви $E_1; R_{01}$ — R_1 протекает ток I_1 .

Узел — это место соединения ветвей электрической цепи, называемое *точкой разветвления*.

Узел в схемах электрических цепей изображается как контакт неразборного электрического соединения (см. табл. 2.1). Цепь (см. рис. 3.1) содержит четыре узла, обозначенных цифрами 1, 2, 3, 4, с ветвями, расходящимися из узлов под прямым углом. Другие варианты изображения схем электрических цепей представлены на рис. 3.2.

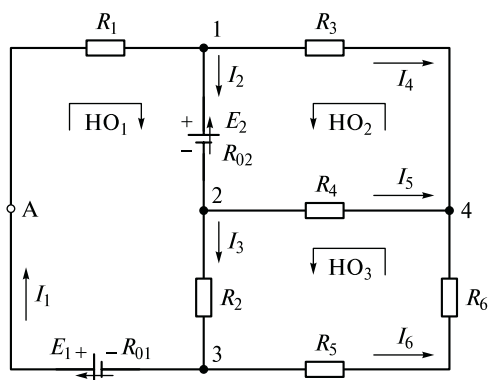


Рис. 3.1. Схема сложной разветвленной электрической цепи:
 NO_1, NO_2, NO_3 — направления обхода

Контур электрической цепи — это замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям. Например, замкнутый путь $(E_1; R_{01}) — R_1 — (E_2; R_{02}) — R_2$, показанный на рис. 3.1, — контур, составленный тремя ветвями с токами I_1, I_2 и I_3 .

Независимый контур — это контур, в состав которого входит хотя бы одна ветвь, не вошедшая в состав ранее выбранных контуров.

Например, цепь (см. рис. 3.1) содержит три независимых друг от друга контура из семи контуров (убедитесь в этом самостоятельно). При этом могут быть составлены разные сочетания независимых контуров. Для одного из таких сочетаний контуров на рис. 3.1 показаны направления обхода: $NO_1 \dots NO_3$. Ветвь $(E_1; R_{01}) — R_1$ контура NO_1 , ветвь с сопротивлением R_3 контура NO_2 и ветвь $R_5 — R_6$ контура NO_3 не входят в состав двух других контуров выбранного сочетания.

Первый закон Кирхгофа. Этот закон относится к узлам электрической цепи. Измерение потенциалов в точках электрической

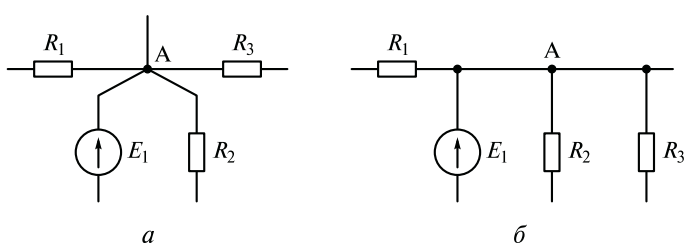


Рис. 3.2. Варианты изображения узла электрической цепи:
 a — узел: точка A; b — узел: несколько точек с одинаковым потенциалом, обозначенных буквой A

цепи постоянного тока показывает, что при протекании тока ни в одной из ее точек не наблюдается изменения потенциала. Следовательно, ни в одной из точек цепи не происходит накопления электрического заряда.

Это справедливо и для узлов разветвленных цепей: сколько электрических зарядов в единицу времени (Q/t) втекает в узел, столько же и вытекает из него. Этот факт известен как *закон непрерывного течения тока*, так как в соответствии с формулой (2.1) отношение Q/t равно току.

Ток I , втекающий в узел, складывается из токов отдельных ветвей, в которых заряды направлены к узлу. Из узла суммарный ток I растекается по другим ветвям. Таким образом, в соответствии с законом непрерывного течения тока *сумма токов, втекающих в узел, равна сумме токов, вытекающих из него*. Это обстоятельство было сформулировано Г.Р. Кирхгофом* и известно как *первый закон Кирхгофа*:

$$\sum_{\text{ВХ}} I = \sum_{\text{ВЫХ}} I. \quad (3.1)$$

Если в записи первого закона Кирхгофа все токи, проходящие через узел, перенести с соответствующими знаками в одну часть уравнения, то получим еще одну формулировку первого закона Кирхгофа: *алгебраическая сумма токов в узле равна нулю*. При этом токи, втекающие в узел, пишутся с одним знаком, вытекающие из узла — с противоположным знаком.

Таким образом, математическая запись первого закона Кирхгофа имеет следующий вид:

$$\sum_{\text{алг}} I = 0. \quad (3.2)$$

Например, в соответствии с этим законом для узлов цепи (см. рис. 3.1) можно записать:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_4 \text{ (узел 1); } I_2 = I_3 + I_5 \text{ (узел 2);} \\ I_3 &= I_1 + I_6 \text{ (узел 3); } I_4 + I_5 + I_6 = 0 \text{ (узел 4),} \end{aligned}$$

или

$$I_1 - I_2 - I_4 = 0; \quad I_2 - I_3 - I_5 = 0; \quad -I_1 + I_3 - I_6 = 0; \quad I_4 + I_5 + I_6 = 0.$$

Второй закон Кирхгофа. Этот закон относится к контурам электрической цепи и формулируется следующим образом:

* Кирхгоф Г.Р. (1824—1887) — немецкий физик.

в замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма ЭДС контура равна алгебраической сумме падений напряжения на всех сопротивлениях контура:

$$\sum_{\text{алг}} E = \sum_{\text{алг}} (RI). \quad (3.3)$$

Обоснование формулировки закона. Покажем справедливость выражения (3.3). Для этого проследим изменение потенциала в точках замкнутого контура $(E_1; R_{01}) - R_1 - (E_2; R_{02}) - R_2$ электрической цепи (см. рис. 3.1), обойдя контур в произвольном направлении, например в указанном на рис. 3.1 направлении НО_1 . Учитывая порядок расчета потенциалов (см. подразд. 2.12), запишем:

$$\begin{aligned} \varphi_A - \varphi_3 &= E_1 - I_1 R_{01}; \quad \varphi_A = \varphi_3 + E_1 - I_1 R_{01}; \\ \varphi_A - \varphi_1 &= I_1 R_1; \quad \varphi_1 = \varphi_A - I_1 R_1; \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= E_2 + I_2 R_{02}; \quad \varphi_2 = \varphi_1 - E_2 - I_2 R_{02}; \\ \varphi_2 - \varphi_3 &= I_3 R_2; \quad \varphi_3 = \varphi_2 - I_3 R_2. \end{aligned}$$

Сложив полученные уравнения, получим выражение

$$\begin{aligned} \varphi_A + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 &= \varphi_3 + E_1 - I_1 R_{01} + \varphi_A - I_1 R_1 + \varphi_1 - E_2 - \\ &\quad - I_2 R_{02} + \varphi_2 - I_3 R_2. \end{aligned}$$

Поместив ЭДС и падения напряжения в разных частях уравнения, получим

$$E_1 - E_2 = I_1(R_1 + R_{01}) + I_2 R_{02} + I_3 R_2,$$

что соответствует формулировке закона (см. формулу (3.3)).

Правила составления уравнений по второму закону Кирхгофа. Термин «алгебраическая сумма» предполагает учет знаков:

- ЭДС записывается со знаком «+», если направление ЭДС совпадает с направлением произвольно выбранного направления обхода (НО) контура; в противном случае ЭДС записывается со знаком «-»;

- падение напряжения на сопротивлении записывается со знаком «+», если направление тока в сопротивлении совпадает с направлением обхода контура, и со знаком «-» — в противном случае.

3.2. Способы соединения резисторов

Последовательное соединение резисторов. Последовательное соединение элементов, когда по ним протекает один и тот же ток, —

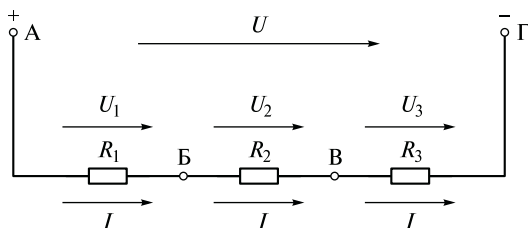


Рис. 3.3. Последовательное соединение резисторов

это соединение элементов, в том числе и резисторов, один за другим без разветвлений. Например, соединение (рис. 3.3) представляет собой последовательное соединение резисторов.

Основные закономерности последовательного соединения резисторов:

- падения напряжения на последовательно соединенных резисторах пропорциональны значениям их сопротивлений.

Например, для соединения резисторов (см. рис. 3.3) справедливо

$$U_1/U_2/U_3 = R_1/R_2/R_3. \quad (3.4)$$

Обоснование. Падения напряжения на резисторах выражаются законом Ома (см. формулу (2.5)). Таким образом, для цепи (см. рис. 3.3) справедливо:

$$U_1 = R_1 I; \quad U_2 = R_2 I; \quad U_3 = R_3 I.$$

Разделив представленные уравнения одно на другое, получаем

$$U_1/U_2/U_3 = R_1/R_2/R_3;$$

- сумма падений напряжения на последовательно соединенных резисторах равна напряжению на выводах всего соединения.

Например, для соединения резисторов (см. рис. 3.3) справедливо

$$U_1 + U_2 + U_3 = U. \quad (3.5)$$

Обоснование. Выразим напряжения на резисторах как разность потенциалов на их выводах:

$$U_1 = \varphi_A - \varphi_B; \quad U_2 = \varphi_B - \varphi_V; \quad U_3 = \varphi_V - \varphi_\Gamma.$$

Сложив составленные уравнения, получим

$$U_1 + U_2 + U_3 = \varphi_A - \varphi_B + \varphi_B - \varphi_V + \varphi_V - \varphi_\Gamma = \varphi_A - \varphi_\Gamma = U;$$

- эквивалентное (общее) сопротивление последовательно соединенных резисторов равно сумме их сопротивлений.

Например, для соединения резисторов (см. рис. 3.3) справедливо

$$R = R_1 + R_2 + R_3. \quad (3.6)$$

Обоснование. Ряд последовательно соединенных резисторов можно заменить резистором, сопротивление которого при неизменном напряжении на выводах не вызовет изменения тока в цепи. Такое сопротивление называется *эквивалентным*, или *общим, сопротивлением*. Таким образом, эквивалентное сопротивление $R = U/I$.

Для рассматриваемого примера после подстановки формулы (3.5) в выражение $R = U/I$ с учетом формулы (2.4) получим

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} + \frac{U_3}{I} = R_1 + R_2 + R_3;$$

- мощность, потребляемая эквивалентным резистором, равна сумме мощностей, потребляемых последовательно соединенными резисторами.

Например, для соединения резисторов (см. рис. 3.3) справедливо

$$P = P_1 + P_2 + P_3. \quad (3.7)$$

Обоснование. Умножим обе части (левую и правую) выражения (3.6) на одну и ту же величину I^2 :

$$I^2 R = I^2 R_1 + I^2 R_2 + I^2 R_3.$$

С учетом формулы (2.25) получим

$$P = P_1 + P_2 + P_3;$$

- мощности, потребляемые отдельными участками цепи, пропорциональны их сопротивлениям.

Например, для соединения резисторов (см. рис. 3.3) справедливо

$$P_1/P_2/P_3 = R_1/R_2/R_3. \quad (3.8)$$

Обоснование. Представим мощности потребителей (резисторов) в соответствии с формулой (2.25) выражениями типа $I^2 R$:

$$P_1 = I^2 R_1; P_2 = I^2 R_2; P_3 = I^2 R_3.$$

Разделив указанные выражения одно на другое, получим

$$P_1/P_2/P_3 = I^2 R_1/I^2 R_2/I^2 R_3 = R_1/R_2/R_3.$$

Параллельное соединение резисторов. *Параллельным* соединением резисторов (и вообще, ветвей разветвленной цепи) называется такое соединение, при котором к одним и тем же двум узлам электрической цепи присоединены несколько ветвей (две или

более). Варианты изображения параллельного соединения трех резисторов показаны на рис. 3.4.

Основные закономерности параллельного соединения резисторов:

- токи в параллельных ветвях с резисторами распределяются прямо пропорционально проводимостям ветвей или обратно пропорционально их сопротивлениям.

Например, для соединения резисторов (см. рис. 3.4) справедливо

$$I_1/I_2/I_3 = G_1/G_2/G_3 = \frac{1}{R_1} / \frac{1}{R_2} / \frac{1}{R_3}. \quad (3.9)$$

Обоснование. Так как резисторы присоединены к одним и тем же узлам, то каждый из них находится под одним и тем же напряжением U . Зная напряжение на резисторах и их сопротивление, токи в ветвях можно определить по закону Ома (см. формулу (2.5)). Учитывая, что проводимость согласно формуле (2.6) — величина, обратная сопротивлению, получим:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = G_1U; \quad I_2 = \frac{U}{R_2} = G_2U; \quad I_3 = \frac{U}{R_3} = G_3U.$$

Разделив один ток на другой, получим выражение

$$I_1/I_2/I_3 = G_1/G_2/G_3 = \frac{1}{R_1} / \frac{1}{R_2} / \frac{1}{R_3};$$

- эквивалентная проводимость параллельного соединения резисторов равна сумме проводимостей всех параллельных ветвей.

Например, для трех резисторов (см. рис. 3.4) справедливо

$$G = G_1 + G_2 + G_3. \quad (3.10)$$

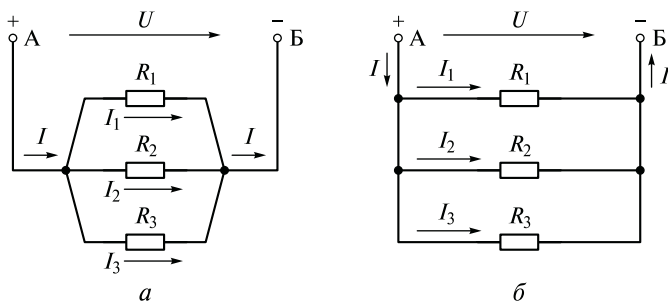


Рис. 3.4. Варианты изображения параллельного соединения резисторов: a — узел в виде одной точки разветвления; b — узел в виде множества точек с одинаковым потенциалом

Обратная величина общего сопротивления параллельного соединения резисторов равна сумме обратных величин сопротивлений его ветвей.

Например, для трех резисторов (см. рис. 3.4) справедливо

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \quad (3.11)$$

Обоснование. Ряд параллельно соединенных резисторов можно заменить резистором, при котором ток в цепи не изменится при прежнем напряжении на исследуемом участке.

Учитывая формулы (2.4), (2.6) и (3.1), можно записать

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{U} = G_1 + G_2 + G_3 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3};$$

• эквивалентное сопротивление при параллельном соединении трех резисторов:

$$R = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}. \quad (3.12)$$

Обоснование. Формула (3.12) получена из формулы (3.11) после известных математических преобразований.

• общее сопротивление параллельного соединения нескольких (N) резисторов с одинаковыми сопротивлениями меньше сопротивления одного резистора в N раз:

$$R = R_N / N, \quad (3.13)$$

где R_N — сопротивление одного из резисторов.

Обоснование. Формула (3.13) легко получается из формулы (3.11) при одинаковых значениях сопротивлений;

• мощность параллельного соединения равна сумме мощностей всех резисторов.

Например, для трех резисторов

$$P = P_1 + P_2 + P_3. \quad (3.14)$$

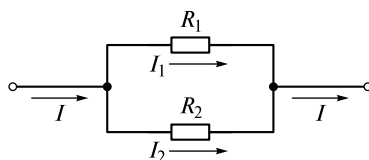
Обоснование. Умножим обе части равенства (3.11) на U^2 . Принимая во внимание формулы (2.5) и (2.25), получим:

$$\frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2} + \frac{U^2}{R_3}; \quad UI = UI_1 + UI_2 + UI_3; \quad P = P_1 + P_2 + P_3.$$

Закономерности параллельного соединения двух резисторов (рис. 3.5):

• эквивалентная проводимость. Аналогично формуле (3.10)

Рис. 3.5. Параллельное соединение двух резисторов



$$G = G_1 + G_2; \quad (3.15)$$

- эквивалентное сопротивление. По аналогии с формулой (3.11)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2},$$

откуда

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad (3.16)$$

т. е. эквивалентное сопротивление параллельного соединения двух резисторов равно произведению сопротивлений, деленному на их сумму;

- токи в параллельных ветвях. Согласно формуле (2.5) напряжение на параллельных ветвях может быть представлено следующими выражениями:

$$U = RI = R_1 I_1 = R_2 I_2.$$

Откуда токи в параллельных ветвях:

$$\begin{aligned} I_1 &= I \frac{R}{R_1} = I \frac{R_1 R_2}{R_1 (R_1 + R_2)} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \\ I_2 &= I \frac{R}{R_2} = I \frac{R_1 R_2}{R_2 (R_1 + R_2)} = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Таким образом, ток в любой из двух параллельных ветвей равен общему току, умноженному на сопротивление противоположной ветви и деленному на сумму сопротивлений параллельных ветвей.

Кроме того, токи в двух параллельных ветвях обратно пропорциональны их сопротивлениям:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (3.18)$$

Соединение резисторов треугольником и звездой. *Треугольником* называют соединение трех ветвей, образующих замкнутый контур с тремя узлами.

Звездой называют совокупность трех ветвей, исходящих из одного узла.

Схемы соединения резисторов треугольником (треугольник сопротивлений) и звездой (звезда сопротивлений) показаны на рис. 3.6.

Треугольник сопротивлений можно заменить эквивалентной звездой и, наоборот, звезду сопротивлений — эквивалентным треугольником. Взаимная замена эквивалентных треугольника и звезды часто позволяет упростить расчет разветвленных цепей.

Замена является эквивалентной, если при равных напряжениях между одноименными узлами треугольника и звезды токи в подводящих проводах, соединяющих эти узлы с остальной частью цепи, остаются неизменными.

Например, треугольник сопротивлений (рис. 3.6, а) и звезда сопротивлений (рис. 3.6, б) эквивалентны, если при равных напряжениях между одноименными узлами (А, Б, В) треугольника и звезды их одноименные токи (I_A , I_B , I_B) одинаковы.

Из условия эквивалентности замены можно вывести соотношения между сопротивлениями треугольника и эквивалентной ему звезды, и наоборот.

Определение сопротивлений лучей эквивалентной звезды R_A , R_B , R_B через известные сопротивления сторон треугольника R_{AB} , R_{BB} , R_{BA} . Для определения трех неизвестных сопротивлений звезды достаточно составить три уравнения, связывающие неизвестные сопротивления звезды и известные сопротивления треугольника, и решить их относительно неизвестных сопротивлений. Учитывая, что равенство токов (I_A , I_B , I_B) в подводящих проводах при эквивалентной замене должно выполняться при любых режимах работы ветвей цепи,

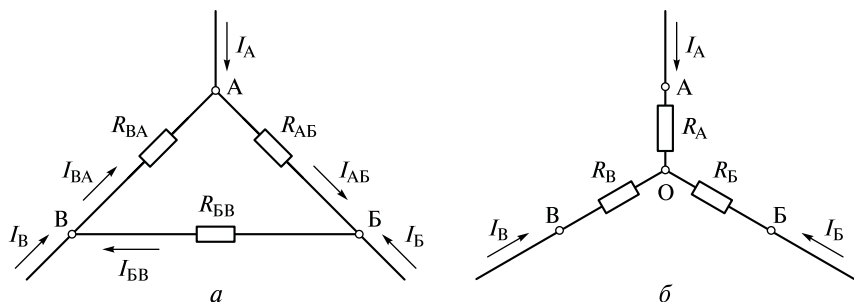


Рис. 3.6. Схемы соединения резисторов:

а — треугольником; б — звездой

рассмотрим поочередно режим холостого хода (обрыв) в подводящих проводах (А, Б, В):

- обрыв провода А. Ток в проводе А: $I_A = 0$. Чтобы в обеих схемах были соответственно равны токи I_B и I_B , общие сопротивления цепей между узлами Б и В должны быть одинаковы. В звезде сопротивлений между указанными точками имеем последовательное соединение R_B и R_B . В треугольнике сопротивлений между узлами Б и В имеем параллельное соединение двух ветвей: в одной — сопротивление $R_{БВ}$, в другой — последовательное соединение $R_{АБ}$ и $R_{ВА}$.

По аналогии с формулами (3.6) и (3.16), составим выражения для общих сопротивлений звезды и треугольника между узлами Б и В и приравняем их:

$$R_B + R_B = \frac{R_{БВ}(R_{ВА} + R_{АБ})}{R_{БВ} + R_{ВА} + R_{АБ}}; \quad (3.19)$$

- обрыв провода Б. Аналогично предыдущему пункту, составим формулы общих сопротивлений звезды и треугольника между узлами В и А и приравняем их:

$$R_B + R_A = \frac{R_{ВА}(R_{БВ} + R_{АБ})}{R_{ВА} + R_{БВ} + R_{АБ}}; \quad (3.20)$$

- обрыв провода В. Таким же образом получим формулы общих сопротивлений звезды и треугольника между узлами А и Б и приравняем их:

$$R_A + R_B = \frac{R_{АБ}(R_{ВА} + R_{БВ})}{R_{АБ} + R_{ВА} + R_{БВ}}. \quad (3.21)$$

Решив совместно уравнения (3.19)...(3.21) относительно сопротивлений звезды, получим зависимости:

$$R_A = \frac{R_{АБ}R_{ВА}}{R_{АБ} + R_{БВ} + R_{ВА}}; \quad (3.22)$$

$$R_B = \frac{R_{БВ}R_{АБ}}{R_{АБ} + R_{БВ} + R_{ВА}}; \quad (3.23)$$

$$R_B = \frac{R_{ВА}R_{БВ}}{R_{АБ} + R_{БВ} + R_{ВА}}. \quad (3.24)$$

Таким образом, сопротивление луча эквивалентной звезды, направленного к одному из узлов (А, Б, В), равно произведению сопротивлений двух сторон треугольника, сходящихся в этом узле, деленному на сумму сопротивлений всех сторон треугольника.

Следствие. Если сопротивления треугольника равны между собой, то равны между собой и сопротивления звезды. Из соотношений (3.22)...(3.24) следует, что сопротивление луча звезды R_Y в три раза меньше сопротивления треугольника R_Δ :

$$R_Y = R_\Delta/3. \quad (3.25)$$

Определение сопротивлений сторон эквивалентного треугольника R_{AB} , R_{BB} , R_{BA} через известные сопротивления лучей звезды R_A , R_B , R_B . Решив совместно уравнения (3.22)...(3.24) относительно сопротивлений треугольника, получим зависимости:

$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_B}; \quad (3.26)$$

$$R_{BB} = R_B + R_B + \frac{R_B R_B}{R_A}; \quad (3.27)$$

$$R_{BA} = R_B + R_A + \frac{R_B R_A}{R_B}. \quad (3.28)$$

Таким образом, сопротивление стороны эквивалентного треугольника равно сумме сопротивлений двух лучей звезды, присоединенных к тем же узлам, что и сторона треугольника, и их произведения, деленного на сопротивление третьего луча звезды.

3.3. Метод «свертки» для расчета разветвленных цепей с одним источником энергии

Для расчета разветвленных цепей с одним источником применяется метод преобразования схемы путем замены групп сопротивлений их эквивалентами. Он позволяет упростить схему и применить к ней уже известные методы расчета.

Метод расчета, заключающийся в первоначальном упрощении схемы — «свертке» — с последующим поэтапным возвращением к ее исходному виду, называют *методом «свертки»*.

Пример 3.1. Ветвь исследуемой цепи содержит источник, ЭДС которого $E = 60$ В, а внутреннее сопротивление $R_0 = 1$ Ом, и сопротивление $R_1 = 9$ Ом. К концам ветви в точках А и Б присоединено два параллельных сопротивления: $R_2 = 50$ Ом и $R_3 = 75$ Ом.

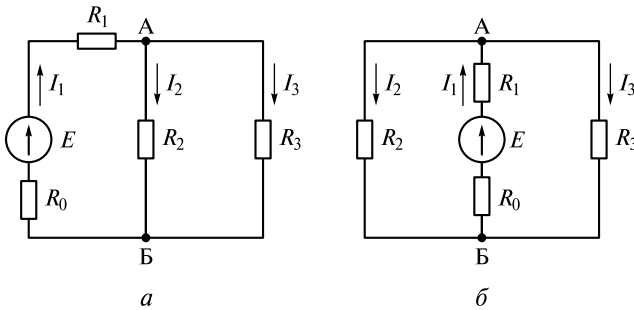


Рис. 3.7. Два варианта схемы разветвленной цепи с одним источником:
a — источник в левой ветви; *б* — источник во внутренней ветви

Составить схему замещения цепи и вычислить токи во всех участках цепи, напряжения на выводах потребителей и источника, а также мощности источника и всех потребителей. Для проверки правильности расчета цепи составить баланс мощностей.

Решение.

Заданная цепь может иметь два варианта схемного изображения, показанные на рис. 3.7. Схемы, приведенные на рис. 3.7, *a* и рис. 3.7, *б* отличаются друг от друга только тем, что в варианте схемы (см. рис. 3.7, *б*) ветвь, содержащая источник, располагается в середине схемы. Расчет цепи (см. рис. 3.7, *б*) иногда вызывает затруднение у тех, кто не сразу замечает, что сопротивления R_2 и R_3 присоединены к одним и тем же узлам (А и Б), т.е. соединены параллельно. Таким образом, варианты схемы (см. рис. 3.7) — это различные схемные изображения одной и той же цепи, поэтому приведенный далее расчет одинаков для обеих схем.

1. Вычисление общего тока. Упростим схему, заменив параллельно соединенные сопротивления R_2 и R_3 их общим сопротивлением:

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{50 \cdot 75}{50 + 75} = 30 \text{ Ом.}$$

После замены получаем неразветвленную цепь (рис. 3.8), расчет которой нам уже известен.

В цепи по всем ее элементам протекает один общий ток I_1 , который легко определяется по закону Ома (см. формулу (2.32)):

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_{2,3} + R_0} = \frac{60}{9 + 30 + 1} = 1,5 \text{ А.}$$

2. Вычисление токов в ветвях цепи по общему току. После определения тока I_1 возвращаемся к схеме (см. рис. 3.7) и находим

токи I_2 и I_3 в ветвях заданной цепи. Это можно выполнить двумя способами: по распределению общего тока между ветвями и по узловому напряжению:

а) определение токов в ветвях по распределению общего тока между ветвями. Общий ток I_1 разделяется в узле А на два тока (I_2 и I_3), распределяясь обратно пропорционально их сопротивлениям. Согласно формуле (3.17) ток

$$I_2 = \frac{I_1 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{1,5 \cdot 75}{50 + 75} = 0,9 \text{ А.}$$

Ток I_3 во второй параллельной ветви можно определить по той же формуле (3.17), но проще: по первому закону Кирхгофа (см. формулу (3.1)):

$$I_3 = I_1 - I_2 = 1,5 - 0,9 = 0,6 \text{ А;}$$

б) вычисление токов в ветвях цепи по узловому напряжению U_{AB} . Указанное напряжение легко определить по упрощенной эквивалентной схеме (см. рис. 3.8):

$$U_{AB} = I_1 R_{23} = 1,5 \cdot 30 = 45 \text{ В.}$$

Из закона Ома для участка цепи (см. формулу (2.5)) следует:

$$I_2 = U_{AB} / R_2 = 45 / 50 = 0,9 \text{ А.}$$

Ток I_3 можно определить или по формуле (2.5), или по первому закону Кирхгофа (см. формулу (3.1)):

$$I_3 = I_1 - I_2 = 1,5 - 0,9 = 0,6 \text{ А.}$$

3. Вычисление напряжений в заданной цепи:

а) напряжение на сопротивлениях R_2 и R_3 одинаково и вычислено ранее: $U_{AB} = 45 \text{ В}$;

б) напряжения на сопротивлениях R_1 и R_0 определяем по закону Ома (см. формулу (2.5)):

$$U_1 = I_1 R_1 = 1,5 \cdot 9 = 13,5 \text{ В; } U_0 = I_1 R_0 = 1,5 \cdot 1 = 1,5 \text{ В;}$$

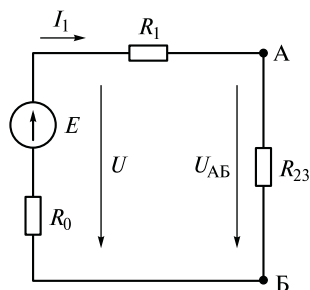


Рис. 3.8. Схема цепи после преобразования

в) напряжение U на выводах источника в соответствии с формулой (2.36):

$$U = E - U_0 = 60 - 1,5 = 58,5 \text{ В};$$

г) проверка правильности расчета цепи. Для заданной цепи можно составить уравнение по второму закону Кирхгофа (см. формулу (3.3)):

$$E = U_1 + U_{AB} + U_0 = 13,5 + 45 + 1,5 = 60 \text{ В}.$$

Рассчитанное значение ЭДС равно заданному значению $E = 60 \text{ В}$, что говорит о правильности расчета цепи.

4. Вычисление мощностей заданной цепи:

а) мощность, развиваемая источником, согласно формуле (2.2):

$$P_{\text{ист}} = EI_1 = 60 \cdot 1,5 = 90 \text{ Вт};$$

б) мощность потерь во внутреннем сопротивлении R_0 согласно (2.25):

$$P_0 = R_0 I_1^2 = 1 \cdot 1,5^2 = 2,25 \text{ Вт};$$

в) мощность, потребляемая сопротивлением R_1 :

$$P_1 = U_1 I_1 = 13,5 \cdot 1,5 = 20,25 \text{ Вт};$$

г) мощность, потребляемая сопротивлением R_2 :

$$P_2 = U_{AB} I_2 = 45 \cdot 0,9 = 40,5 \text{ Вт};$$

д) мощность, потребляемая сопротивлением R_3 :

$$P_3 = U_{AB} I_3 = 45 \cdot 0,6 = 27 \text{ Вт};$$

е) мощность, отдаваемую источником во внешнюю цепь, можно вычислить по формуле (2.25):

$$P = UI_1 = 58,5 \cdot 1,5 = 87,75 \text{ Вт}.$$

Мощность P согласно формулам (3.7) и (3.14) равна сумме мощностей потребителей (R_1, R_2, R_3), поэтому P можно определить еще и следующим образом:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 20,25 + 40,5 + 27 = 87,75 \text{ Вт}.$$

5. Составление баланса мощностей для заданной цепи. Согласно формуле (2.23) составим баланс мощностей для проверки правильности расчета цепи:

$$P_{\text{ист}} = P + P_0 = 87,75 + 2,25 = 90 \text{ Вт},$$

что соответствует вычисленному ранее значению $P_{\text{ист}}$. Баланс мощностей сходится, что подтверждает правильность выполненных расчетов.

3.4. Методы расчета сложных электрических цепей

Метод узловых и контурных уравнений — метод уравнений Кирхгофа. Этот метод основан на применении первого и второго законов Кирхгофа. Он не требует никаких преобразований схемы и пригоден для расчета любой цепи (с любым числом источников и ветвей, в том числе цепей, рассмотренных в подразд. 3.3). В этом его преимущество перед другими методами.

Расчет сложных электрических цепей рассматриваемым методом включает в себя следующие этапы.

1. Определение числа неизвестных токов и выбор их направлений. Нам известно (см. подразд. 3.1), что в разветвленной цепи ток имеет одно и то же значение в каждом неразветвленном участке цепи, называемом ветвью. Следовательно, *число различных токов в сложной электрической цепи равно числу ее ветвей.*

В сложной цепи с несколькими источниками энергии направления токов в ветвях заранее (до расчета токов) указать нельзя. Поэтому *сначала направления токов в ветвях сложной электрической цепи выбирают произвольно.*

2. Определение числа уравнений и составление уравнений по законам Кирхгофа. При выбранных направлениях, считая их положительными, составляют уравнения по первому (см. формулу (3.1)) и второму (см. формулу (3.3)) законам Кирхгофа, учитывая следующее:

- число уравнений, которое необходимо составить для определения токов, равно числу неизвестных токов;

- сначала составляют уравнения по первому закону Кирхгофа, как более простому. При этом необходимо учитывать, что не все возможные уравнения, составленные по первому закону Кирхгофа, оказываются независимыми;

- в общем случае для цепи, имеющей n узлов, число независимых уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, на одно меньше, чем число узлов, т.е. равно $(n - 1)$;

- недостающие уравнения составляют по второму закону Кирхгофа — для независимых контуров;

- при составлении уравнений по второму закону Кирхгофа предвзятельно произвольно выбирают направления обхода контуров.

Необходимые уравнения составляют, пользуясь правилами, сформулированными в подразд. 3.1.

3. **Вычисление токов.** В полученные уравнения подставляют заданные значения сопротивлений цепи и ЭДС, затем решают систему уравнений относительно неизвестных токов.

В общем случае для разветвленных электрических цепей с n ветвями для определения значений токов необходимо решать систему, состоящую из n уравнений. Решением такой системы является

n значений неизвестных токов, удовлетворяющих одновременно каждому из уравнений системы. Такую систему часто решают *методом последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса)*.

Этот метод заключается в следующем:

- разрешают одно из уравнений относительно первой неизвестной и подставляют полученное выражение в другие уравнения;
- повторяют прием для следующей переменной до тех пор, пока не останется одно уравнение с одним неизвестным;
- после его решения процесс повторяется в обратном порядке для нахождения второго неизвестного и т.д.

Если значение какого-либо тока в результате расчета оказывается отрицательным, то направление тока считается неправильно выбранным и на схеме его изменяют на противоположное.

Пример 3.2. Для цепи (рис. 3.9) дано: $E_1 = 260$ В; $E_2 = 80$ В; $R_1 = 1,2$ кОм; $R_2 = R_4 = 0,8$ кОм; $R_3 = 240$ Ом; $R_{01} = 20$ Ом; $R_{02} = 0$.

Определить токи во всех ветвях цепи методом уравнений Кирхгофа. Для проверки правильности расчета составить баланс мощностей.

Решение.

1. Определение числа неизвестных токов и выбор их направления. В заданной цепи (см. рис. 3.9) к узловым точкам А и Б присоединены три ветви. Таким образом, число неизвестных токов в цепи равно трем.

Направления токов в цепи выберем произвольно, как показано на рис. 3.10 штриховыми стрелками.

2. Определение необходимого числа уравнений и их составление:

а) так как число уравнений, которое необходимо составить для определения токов, равно числу неизвестных токов, то для определения токов в цепи (см. рис. 3.10) необходимо составить три уравнения;

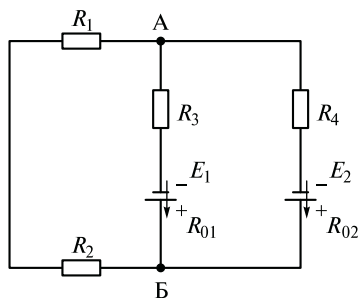


Рис. 3.9. Сложная цепь с тремя ветвями

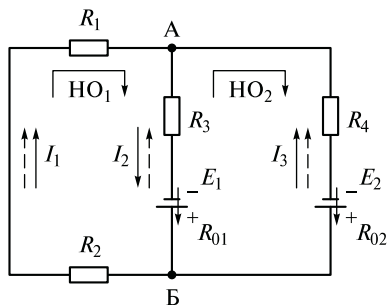


Рис. 3.10. Токораспределение в сложной цепи

б) по первому закону Кирхгофа необходимо составить одно уравнение, на единицу меньше, чем число имеющихся в цепи узлов (два узла). Составим уравнение, например, для узла А:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0; \quad (3.29)$$

в) два недостающих уравнения составим по второму закону Кирхгофа для независимых контуров:

- выберем независимые контуры.

Всего в цепи три замкнутых контура, но только два из них являются независимыми. Для рассматриваемой цепи можно указать три набора по два независимых контура:

$$\begin{aligned} R_1 - R_4 - (E_2; R_{02}) - R_2; \quad R_1 - R_3 - (E_1; R_{01}) - R_2; \\ R_1 - R_4 - (E_2; R_{02}) - R_2; \quad R_4 - (E_2; R_{02}) - (E_1; R_{01}) - R_3; \\ R_1 - R_3 - (E_1; R_{01}) - R_2; \quad R_4 - (E_2; R_{02}) - (E_1; R_{01}) - R_3. \end{aligned}$$

Выберем, например, последний набор независимых контуров:

$$R_1 - R_3 - (E_1; R_{01}) - R_2; \quad R_4 - (E_2; R_{02}) - (E_1; R_{01}) - R_3;$$

- произвольно выберем направления обхода контуров, например как показано на рис. 3.10;

• пользуясь правилами, сформулированными в подразд. 3.1, составим уравнения для выбранных независимых контуров, выбранных направлений их обхода и выбранных (штриховых) направлений токов:

$$E_1 = I_1(R_1 + R_2) - I_2(R_3 + R_{01}); \quad (3.30)$$

$$-E_1 + E_2 = I_2(R_3 + R_{01}) - I_3(R_4 + R_{02}). \quad (3.31)$$

3. Вычисление неизвестных токов и определение их направлений:

а) в уравнения (3.30) и (3.31) подставим заданные значения сопротивлений и ЭДС цепи. Совместно с уравнением (3.29) получим систему уравнений:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0;$$

$$260 = 2000I_1 - 260I_2; \quad (3.32)$$

$$-180 = 260I_2 - 800I_3; \quad (3.33)$$

б) решим систему уравнений относительно токов I_1 , I_2 и I_3 методом последовательного исключения переменных (метод Гаусса).

Для этого, например, выразим ток I_1 из уравнения (3.29):

$$I_1 = -(I_2 + I_3). \quad (3.34)$$

Подставив выражение (3.34) в (3.32), получим

$$260 = -2\,000(I_2 + I_3) - 260I_2. \quad (3.35)$$

После приведения подобных членов уравнение (3.35) примет следующий вид:

$$260 = -2\,260I_2 - 2\,000I_3; \quad (3.36)$$

в) таким образом, получилось два уравнения с двумя неизвестными I_2 и I_3 : уравнения (3.33) и (3.36). Умножив уравнение (3.33) на число 5, а уравнение (3.36) на число -2 и сложив их, получим уравнение

$$-1\,420 = 5\,820I_2,$$

откуда

$$I_2 = -0,244 \text{ А.}$$

Отрицательное значение силы тока говорит о том, что направление тока I_2 первоначально было выбрано неправильно. Его истинное направление противоположно (истинные направления токов показаны на рис. 3.10 сплошными стрелками).

В последующих расчетах используют значения силы токов с учетом знака, полученного в процессе расчета, так как уравнения справедливы для первоначально выбранных направлений токов;

г) зная значение силы тока I_2 , из уравнений (3.33) или (3.36) определим значение силы тока I_3 :

$$-180 = 260(-0,244) - 800I_3,$$

откуда

$$I_3 = \frac{180 - 260 \cdot 0,244}{800} = 0,146 \text{ А.}$$

Согласно формуле (3.29):

$$I_1 = -(I_2 + I_3) = 0,244 - 0,146 = 0,098 \text{ А.}$$

Итак, значения силы токов в заданной цепи:

$$I_1 = 0,098 \text{ А; } I_2 = -0,244 \text{ А; } I_3 = 0,146 \text{ А.}$$

4. Расчет баланса мощностей. Для проверки правильности расчета токов в рассматриваемой цепи составим баланс мощностей (см. формулу (2.23)) в соответствии с истинными направлениями токов:

$$E_1I_2 = E_2I_3 + I_1^2(R_1 + R_2) + I_2^2(R_3 + R_{01}) + I_3^2(R_4 + R_{02}). \quad (3.37)$$

Мощность источника E_2 , равная $E_2 I_3$, записана в правой части уравнения, так как источник E_2 — потребитель.

Левая часть выражения (3.37):

$$260 \cdot 0,244 = 63,44 \text{ Вт.}$$

Правая часть выражения (3.37):

$$80 \cdot 0,146 + 0,098^2 \cdot 2000 + 0,244^2 \cdot 260 + 0,146^2 \cdot 800 = \\ = 11,68 + 19,208 + 15,479 + 17,053 = 63,42 \text{ Вт.}$$

Левая часть баланса практически равна правой части, следовательно, расчет токов выполнен правильно. Степень совпадения результатов вычисления левой и правой частей баланса мощностей зависит от степени точности, с которой выполнялись расчеты.

Метод наложения токов. В цепи, где действует одновременно несколько ЭДС, для расчета токов можно применить *метод наложения*. В подразд. 2.9 с помощью этого метода был выведен закон Ома для неразветвленной цепи с несколькими источниками.

Принцип наложения заключается в следующем: ток в какой-либо ветви линейной цепи равен алгебраической сумме частичных токов, создаваемых в этой ветви всеми по отдельности действующими ЭДС источников.

Метод наложения позволяет заменить расчет сложной цепи с несколькими ЭДС расчетом нескольких простых цепей с одной ЭДС в каждой цепи.

Пример 3.3. Рассчитать токи в цепи (см. рис. 3.9) методом наложения при значениях параметров, заданных в примере 3.2. Сделать проверку правильности расчета.

Решение.

1. Вычисление частичных токов в заданной цепи от отдельно действующей ЭДС E_1 :

а) исключаем все ЭДС источников в заданной цепи, кроме E_1 . Получим простую разветвленную цепь (рис. 3.11, а) с одной ЭДС E_1 . При этом необходимо помнить, что при расчете указанным методом исключению подлежат только ЭДС источников, но не их внутренние сопротивления;

б) определяем направления токов в цепи. Токи направлены от «плюса» к «минусу» источника E_1 , как показано на рис. 3.11, а.

Все частичные токи от E_1 обозначены буквой I с одним штрихом: I_1, I_2, I_3 ;

в) вычисляем частичные токи в цепи от E_1 методом «свертки»:

• «свернем» цепь (см. рис. 3.11, а), для чего заменим параллельное соединение сопротивлений $(R_1 + R_2)$ и $(R_4 + R_{02})$ их эквивалентным сопротивлением

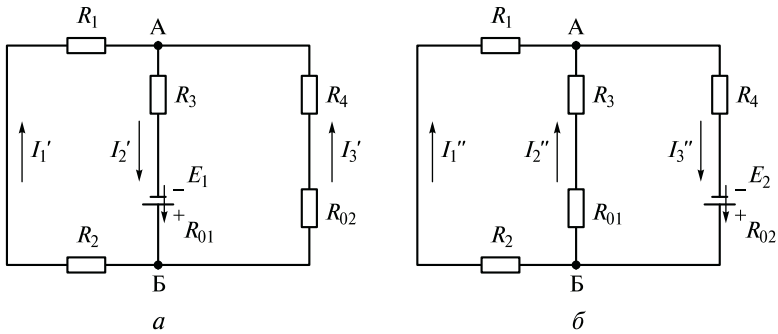


Рис. 3.11. Частичные токи в сложной цепи:
a — от ЭДС E_1 ; *б* — от ЭДС E_2

$$R_{s1} = \frac{(R_1 + R_2)(R_4 + R_{02})}{R_1 + R_2 + R_4 + R_{02}} = \frac{2\,000 \cdot 800}{2\,800} = 571,429 \text{ Ом.}$$

Получим неразветвленную цепь, в которой протекает ток I_2 ;

- определим ток I_2 по закону Ома для полной цепи (см. формулу (2.32)):

$$I_2' = \frac{E_1}{R_{s1} + R_3 + R_{01}} = \frac{260}{571,429 + 240 + 20} = 0,313 \text{ А;}$$

- «развернем» цепь (см. рис. 3.11, *a*) и по общему току I_2 определим ток в одной из параллельных ветвей:

$$I_1' = I_2' \frac{R_4 + R_{02}}{R_1 + R_2 + R_4 + R_{02}} = 0,313 \frac{800}{1\,200 + 800 + 800 + 0} = 0,089 \text{ А.}$$

- ток I_3 во второй параллельной ветви цепи (см. рис. 3.11, *a*) найдем по первому закону Кирхгофа:

$$I_3 = I_2 - I_1 = 0,313 - 0,089 = 0,224 \text{ А.}$$

2. Вычисление частичных токов в цепи от отдельно действующей ЭДС E_2 . В заданной цепи оставим только одну ЭДС E_2 . Получим простую разветвленную цепь с одной ЭДС, токи в которой направлены, как показано на рис. 3.11, *б*. Все частичные токи от E_2 обозначим буквой I с двумя штрихами: I_1'' , I_2'' , I_3'' .

При расчете токов методом наложения целесообразно для исключения путаницы применять одинаковые индексы для обозначения токов в соответствующих ветвях во всех вспомогательных схемах, представляемых по ходу решения.

Для расчета частичных токов от E_2 также применим метод «свертки»:

- заменим параллельное соединение сопротивлений $(R_1 + R_2)$ и $(R_3 + R_{01})$ их эквивалентным сопротивлением («свернем» цепь):

$$R_{32} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_{01})}{R_1 + R_2 + R_3 + R_{01}} = \frac{2\,000 \cdot 260}{2\,260} = 230,088 \text{ Ом};$$

- получим неразветвленную цепь, ток I_3'' , которой определяется по закону Ома для полной цепи:

$$I_3'' = \frac{E_2}{R_{32} + R_4 + R_{02}} = \frac{80}{230,088 + 800 + 0} = 0,078 \text{ А};$$

- определим напряжение между узлами А и Б по закону Ома для участка неразветвленной цепи с сопротивлением R_{32} :

$$U_{AB} = I_3'' R_{32} = 0,078 \cdot 230,088 = 17,947 \text{ В};$$

- частичные токи I_1'' и I_2'' определим в соответствии с законом Ома для участка цепи:

$$I_1'' = U_{AB}/(R_1 + R_2) = 17,947/(1200 + 800) = 0,009 \text{ А};$$

$$I_2'' = U_{AB}/(R_3 + R_{01}) = 17,947/(240 + 20) = 0,069 \text{ А}.$$

3. Вычисление токов в исходной цепи (см. рис. 3.9). Ток в каждой ветви исходной цепи равен алгебраической сумме частичных токов в ней. Частичные токи в левой ветви направлены согласно (в одну сторону), поэтому результирующий ток равен сумме соответствующих частичных токов:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 0,089 + 0,009 = 0,098 \text{ А}.$$

Частичные токи в средней ветви направлены встречно друг другу, поэтому ток

$$I_2 = I_2' - I_2'' = 0,313 - 0,069 = 0,244 \text{ А}.$$

В правой ветви частичные токи также направлены навстречу друг другу, поэтому вычитаются:

$$I_3 = I_3' - I_3'' = 0,244 - 0,078 = 0,146 \text{ А}.$$

Направления результирующих токов: ток I_1 направлен вверх; ток I_2 — по направлению частичного тока I_2' , т. е. вниз; ток I_3 — по току I_3' , т. е. вверх.

Полученные значения силы токов и направления токов соответствуют полученным в той же цепи методом уравнений Кирхго-

фа, что подтверждает правильность расчета токов рассматриваемым методом.

4. Проверка правильности расчета токов по первому закону Кирхгофа. Составим уравнение по первому закону Кирхгофа для любого узла цепи, например для узла А:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$

Значение левой части уравнения соответствует значению правой части уравнения: $0,098 - 0,244 + 0,146 = 0$, что подтверждает правильность расчета токов.

Метод контурных токов. Этот метод расчета сложных цепей, так же, как и метод узловых и контурных уравнений, основан на применении первого и второго законов Кирхгофа. Особенность метода состоит в том, что вводится понятие вспомогательных «контурных» токов — токов, протекающих в замкнутых контурах электрической цепи. Это позволяет сократить число уравнений, необходимых для расчета токов в цепи, что важно при расчете цепи неавтоматизированным способом.

Контурные токи принято нумеровать римскими цифрами: I_I , I_{II} и т. д.

Пример 3.4. Рассчитать токи в цепи (см. рис. 3.9) методом контурных токов при значениях ее параметров, заданных в примере 3.2.

Решение:

а) для электрической цепи (см. рис. 3.9) выберем два независимых контура, например $R_1 - R_3 - (E_1; R_{01}) - R_2$ и $(E_1; R_{01}) - R_3 - R_4 - (E_2; R_{02})$;

б) произвольно выберем направления контурных токов I_I и I_{II} в выбранных контурах, например как показано на рис. 3.12 штриховыми стрелками;

в) составим уравнения по второму закону Кирхгофа для выбранных контуров, совместив направления обхода контуров с направлениями контурных токов.

При этом учитываем, что в смежных ветвях контуров протекает не менее двух контурных токов (свой и ток или токи смежных контуров):

$$E_1 = I_I(R_1 + R_2 + R_3 + R_{01}) - I_{II}(R_3 + R_{01});$$

$$-E_1 + E_2 = -I_I(R_3 + R_{01}) + I_{II}(R_3 + R_4 + R_{01} + R_{02});$$

г) подставим значения параметров в составленные уравнения:

$$260 = I_I(1200 + 800 + 240 + 20) - I_{II}(240 + 20);$$

$$-260 + 80 = -I_I(240 + 20) + I_{II}(240 + 800 + 20 + 0).$$

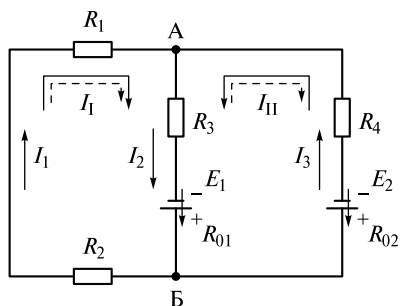


Рис. 3.12. Сложная цепь с изображением контурных токов

Получим систему уравнений:

$$260 = 2260I_I - 260I_{III};$$

$$-180 = -260I_I + 1060I_{III};$$

д) определим неизвестные контурные токи I_I и I_{III} , решая систему двух уравнений одним из известных способов.

Например, умножим первое уравнение на 106, а второе — на 26:

$$27560 = 239560I_I - 27560I_{III};$$

$$-4680 = -6760I_I + 27560I_{III}.$$

После сложения уравнений получим: $22880 = 232800 I_I$, откуда

$$I_I = 0,098 \text{ A}.$$

Значение второго контурного тока определим, подставив в одно из уравнений системы, например в последнее, значение I_I :

$$-4680 = -6760 \cdot 0,098 + 27560I_{III};$$

$$I_{III} = -0,146 \text{ A}.$$

Изменим направление контурного тока I_{III} на противоположное. Истинные направления контурных токов показаны на рис. 3.12 сплошными стрелками;

е) определим токи в ветвях как алгебраическую сумму протекающих в ветви контурных токов, учитывая их истинные направления:

$$I_1 = I_I = 0,098 \text{ A};$$

$$I_2 = I_I + I_{III} = 0,098 + 0,146 = 0,244 \text{ A};$$

$$I_3 = I_{III} = 0,146 \text{ A}.$$

Метод двух узлов. В отличие от предыдущих рассмотренных методов расчета сложной цепи этот метод пригоден для цепей, имеющих только два узла при любом числе ветвей. Цепи с двумя

узлами часто встречаются на практике, и метод двух узлов значительно упрощает их расчет.

Метод характерен тем, что токи в ветвях легко вычисляются через напряжение между узлами по достаточно простым формулам.

Вывод формул расчета токов в ветвях разветвленной цепи с двумя узлами. Вывод расчетных формул приведем на примере цепи (см. рис. 3.9):

1. Направим все токи в ветвях цепи к одному узлу для получения однозначных формул.

Например, направим все токи к узлу А, как показано на рис. 3.13 штриховыми стрелками.

2. Выразим токи в ветвях через узловое напряжение U_{AB} .

Все ветви рассматриваемой цепи параллельны друг другу; включены между одними и теми же узлами А и Б, т.е. имеют одну и ту же разность потенциалов на концах ветвей: $\varphi_A - \varphi_B = U_{AB}$.

Используя известную нам методику расчета потенциалов точек цепи (см. подразд. 2.12), выразим узловое напряжение U_{AB} через параметры каждой ветви цепи в отдельности:

- левая ветвь

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = -I_1(R_1 + R_2); \quad (3.38)$$

- средняя ветвь

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = -E_1 - I_2(R_3 + R_{01}); \quad (3.39)$$

- правая ветвь

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = -E_2 - I_3(R_4 + R_{02}). \quad (3.40)$$

Из выражений (3.38) ... (3.40) получим:

$$I_1 = -U_{AB}/(R_1 + R_2) = -U_{AB}G_1; \quad (3.41)$$

$$I_2 = (-E_1 - U_{AB})/(R_3 + R_{01}) = (-E_1 - U_{AB})G_2; \quad (3.42)$$

$$I_3 = (-E_2 - U_{AB})/(R_4 + R_{02}) = (-E_2 - U_{AB})G_3, \quad (3.43)$$

где G_1, G_2, G_3 — проводимости соответствующих ветвей цепи.

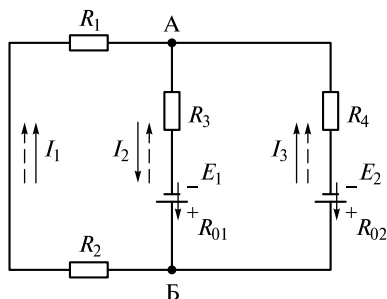


Рис. 3.13. К расчету методом двух узлов

Таким образом, ток в ветви сложной цепи с двумя узлами равен разности ЭДС, взятой с соответствующим знаком, и узлового напряжения, умноженной на проводимость соответствующей ветви.

ЭДС пишется со знаком «-», когда ЭДС направлена встречно выбранному направлению тока в ветви, и знак «+», когда направления ЭДС и тока в ветви совпадают.

Вывод формулы расчета узлового напряжения U_{AB} . Для расчета токов по формулам (3.41)...(3.43) необходимо иметь значение узлового напряжения U_{AB} или иметь возможность его вычислить.

Для получения формулы расчета U_{AB} воспользуемся первым законом Кирхгофа и составим уравнение, например, для узла А:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (3.44)$$

Подставим выражения токов из формул (3.41)...(3.43) в формулу (3.44):

$$-U_{AB}G_1 + (-E_1 - U_{AB})G_2 + (-E_2 - U_{AB})G_3 = 0. \quad (3.45)$$

Из формулы (3.45) следует

$$U_{AB} = \frac{-E_1G_2 - E_2G_3}{G_1 + G_2 + G_3}. \quad (3.46)$$

Таким образом, напряжение между узлами равно алгебраической сумме произведений ЭДС ветвей, взятых с соответствующим знаком, и проводимостей, деленной на сумму проводимостей всех ветвей.

В общем виде

$$U_{AB} = \frac{\sum_{\text{алг}} (EG)}{\sum G}, \quad (3.47)$$

где со знаком «+» записывается ЭДС, совпадающая с направлением тока, со знаком «-» — ЭДС, направленная встречно выбранному направлению тока.

Определение истинных направлений токов в ветвях. При выборе направлений токов мы заведомо допустили ошибку, так как все токи не могут быть направлены к одному узлу. Это противоречит закону непрерывного течения тока.

Таким образом, при получении отрицательного значения тока его направление необходимо исправить в схеме на противоположное.

Пример 3.5. Рассчитать токи в ветвях цепи (см. рис. 3.13) методом двух узлов при значениях ее параметров, заданных в примере 3.2.

Решение.

1. Направим все токи к узлу А как показано штриховыми стрелками на рис. 3.13.

2. Определим проводимости ветвей:

$$G_1 = \frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1\,200 + 800} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ См};$$

$$G_2 = \frac{1}{R_3 + R_{01}} = \frac{1}{240 + 20} = 3,8 \cdot 10^{-3} \text{ См};$$

$$G_3 = \frac{1}{R_4 + R_{02}} = \frac{1}{800 + 0} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ См}.$$

3. Определим узловое напряжение в соответствии с формулой (3.46):

$$U_{AB} = \frac{-E_1 G_2 - E_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{-260 \cdot 3,8 \cdot 10^{-3} - 80 \cdot 1,25 \cdot 10^{-3}}{(0,5 + 3,8 + 1,25) \cdot 10^{-3}} = -196 \text{ В}.$$

4. Определим токи в ветвях по формулам (3.41)... (3.43):

$$I_1 = -U_{AB} G_1 = 196 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 0,098 \text{ А};$$

$$I_2 = (-E_1 - U_{AB}) G_2 = (-260 + 196) \cdot 3,8 \cdot 10^{-3} = -0,243 \text{ А};$$

$$I_3 = (-E_2 - U_{AB}) G_3 = (-80 + 196) \cdot 1,25 \cdot 10^{-3} = 0,145 \text{ А}.$$

Отрицательное значение силы тока I_2 говорит о том, что его направление выбрано неверно и его необходимо изменить на противоположное.

3.5. Способы соединения конденсаторов. Расчет электростатических цепей

Электростатические цепи. Электрические цепи, содержащие только конденсаторы, называют *электростатическими цепями*.

Они широко используются в различных системах электроснабжения, автоматики и радиотехнических устройствах и приборах. В системах электроснабжения электростатические цепи в виде мощных компенсирующих конденсаторов, соединяемых в батареи, применяются для повышения эффективности использования электроэнергии (повышения коэффициента мощности). Соединения конденсаторов широко применяются во вторичных источниках

питания для сглаживания напряжения питания современных электронных устройств, в фильтрах, колебательных контурах и других электротехнических устройствах.

Практический интерес представляет вопрос о распределении заряда и потенциалов в системе проводников, когда система заряжена от источника постоянного напряжения. Каждая пара проводников, полностью изолированных друг от друга, характеризуется электрической емкостью. Система заряженных проводников может содержать не два, а больше проводников и представлять собой сложные электростатические цепи.

В большинстве случаев системы заряженных проводников по отношению к источнику можно рассматривать как *последовательное*, *параллельное* или *смешанное* соединение емкостей.

Расчет электростатических цепей заключается в определении эквивалентных емкостей электростатических цепей, а также в определении зарядов и напряжений на отдельных конденсаторах.

Последовательное соединение конденсаторов с идеальным диэлектриком. Пример последовательного соединения конденсаторов показан на рис. 3.14, *а*. Для упрощения рассуждений рассмотрим процессы, протекающие при подключении системы последовательно соединенных конденсаторов к источнику постоянного напряжения.

Будем считать, что диэлектрик в конденсаторах — идеальный. *Идеальным* называют диэлектрик, не обладающий собственной электропроводностью, а следовательно, и электрическими потерями. В этом случае вся энергия источника идет на создание и сохранение зарядов на обкладках конденсатора.

Распределение зарядов. Так как к источнику подключены крайние пластины последовательной цепочки конденсаторов, то они получают равные по величине и противоположные по знаку заряды. Эти заряды создают вокруг заряженных обкладок электростатическое поле.

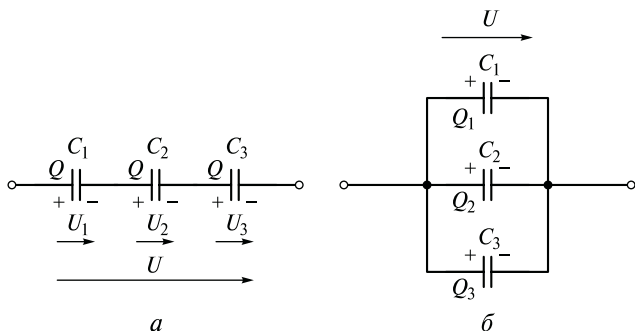


Рис. 3.14. Способы соединения емкостей:

а — последовательное; *б* — параллельное

Соседние с ними обкладки непосредственного контакта с зажимами источника не имеют, но, оказавшись в поле заряженных обкладок, заряжаются вследствие *электростатической индукции*: электрическое поле разделяет заряды в проводнике, соединяющем соседние обкладки конденсаторов. Аналогичным образом заряд распространяется вдоль всей цепочки обкладок.

Поэтому в общем случае можно записать

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_n. \quad (3.48)$$

Таким образом, *в установившемся режиме (когда ток в цепи уже отсутствует) заряд всей группы конденсаторов и каждого конденсатора в отдельности один и тот же.*

Определение эквивалентной емкости. *Эквивалентная емкость* — это емкость, которой можно заменить группу емкостей при соблюдении условия эквивалентности.

Условие эквивалентности емкостей заключается в следующем: емкость конденсатора считается эквивалентной, если конденсатор обладает такой же энергией, что и группа соединенных конденсаторов.

Запишем условие эквивалентности емкостей, учитывая формулу (1.44):

$$\frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} + \frac{Q_3^2}{2C_3} + \dots + \frac{Q_n^2}{2C_n}. \quad (3.49)$$

Для последовательного соединения с учетом формулы (3.49) условие эквивалентности емкостей имеет следующий вид:

$$\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{C_1} + \frac{Q^2}{C_2} + \frac{Q^2}{C_3} + \dots + \frac{Q^2}{C_n}.$$

Из полученного уравнения легко найти эквивалентную емкость последовательного соединения, разделив обе части уравнения на Q^2 :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (3.50)$$

Из формулы (3.50) следует, что *полная емкость последовательно включенных конденсаторов меньше наименьшей из емкостей конденсаторов.*

В случае последовательного соединения конденсаторов с одинаковыми емкостями эквивалентная емкость

$$C = \frac{C_n}{n}. \quad (3.51)$$

Для последовательного соединения двух конденсаторов выражение (3.50) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}; C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (3.52)$$

При последовательном соединении двух конденсаторов с одинаковыми емкостями полная емкость равна половине емкости одного конденсатора.

Распределение напряжений на конденсаторах. Согласно формуле (1.34), с учетом формулы (3.48) выразим общее напряжение цепи и напряжения на отдельных конденсаторах:

$$U = \frac{Q}{C}; U_1 = \frac{Q}{C_1}; U_2 = \frac{Q}{C_2}; U_3 = \frac{Q}{C_3}; \dots; U_n = \frac{Q}{C_n}. \quad (3.53)$$

Из формулы (3.53) следует, что на конденсаторе с меньшей емкостью будет большее падение напряжения, и наоборот.

При последовательном соединении конденсаторов падения напряжений на каждой паре конденсаторов обратно пропорциональны емкостям этих конденсаторов:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}. \quad (3.54)$$

Из условия эквивалентности емкостей для последовательного соединения с учетом формул (1.44) и (3.48) можно получить следующие равенства:

$$\begin{aligned} UQ &= U_1Q + U_2Q + U_3Q + \dots + U_nQ; \\ U &= U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Выражение (3.55) показывает, что *общее напряжение последовательного соединения конденсаторов равно сумме напряжений отдельных конденсаторов, а следовательно, напряжения на отдельных конденсаторах электростатической цепи являются частями общего напряжения.*

Параллельное соединение конденсаторов с идеальным диэлектриком. Параллельное соединение конденсаторов показано на рис. 3.14, б.

Распределение напряжений на конденсаторах. В соответствии со способом соединения все обкладки, подключенные к положительному зажиму источника, имеют одинаковый потенциал. Обкладки, подключенные к отрицательному за-

жиму источника, по той же причине также имеют одинаковый потенциал. Так как напряжение равно разности потенциалов (см. формулу (1.15)), то *при параллельном соединении конденсаторов напряжение на каждом конденсаторе одинаково и равно общему напряжению соединения*. В общем случае можно записать

$$U = U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_n. \quad (3.56)$$

Распределение зарядов на конденсаторах. При неодинаковых значениях емкостей параллельно соединенных конденсаторов заряды на каждом из них разные, так как согласно формуле (1.34):

$$Q = CU; Q_1 = C_1U; Q_2 = C_2U; Q_3 = C_3U; \dots Q_n = C_nU. \quad (3.57)$$

Эквивалентная емкость параллельного соединения конденсаторов. Из условия эквивалентности емкостей (3.49) с учетом формулы (3.57) для параллельного соединения получим:

$$\frac{C^2U^2}{2C} = \frac{C_1^2U^2}{2C_1} + \frac{C_2^2U^2}{2C_2} + \frac{C_3^2U^2}{2C_3} + \dots + \frac{C_n^2U^2}{2C_n};$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \dots C_n. \quad (3.58)$$

Таким образом, *полная (эквивалентная) емкость параллельно соединенных конденсаторов равна сумме емкостей отдельных конденсаторов*.

Общий заряд системы. Покажем, что *общий заряд системы равен сумме зарядов конденсаторов*. Умножим равенство (3.58) на значение напряжения U :

$$CU = C_1U + C_2U + C_3U \dots C_nU.$$

Из полученного выражения в соответствии с формулой (3.57) получим

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n. \quad (3.59)$$

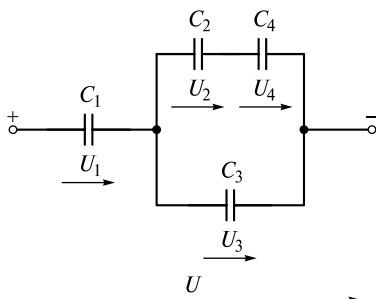


Рис. 3.15. Смешанное соединение емкостей

Расчет электростатических цепей при смешанном соединении конденсаторов. Если в электростатической цепи имеются и последовательное, и параллельное соединения конденсаторов (например, как на рис. 3.15), то такое соединение конденсаторов называют *смешанным*. В этом случае для определения напряжений и зарядов на конденсаторах цепи применяют метод постепенного преобразования цепи — метод «свертки».

Пример 3.6. Рассчитать общую емкость цепи (см. рис. 3.15) и распределение напряжений и зарядов на отдельных конденсаторах цепи, если $C_1 = C_2 = 30 \text{ мкФ}$; $C_3 = 10 \text{ мкФ}$; $C_4 = 60 \text{ мкФ}$; $U = 120 \text{ В}$.

Решение.

1. Определение общей емкости C заданной цепи. Воспользуемся методом «свертки» — постепенного «свертывания» схемы:

а) определим эквивалентную емкость $C_{э1}$ последовательного соединения конденсаторов C_2 и C_4 . В соответствии с формулой (3.52):

$$C_{э1} = \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} = \frac{30 \cdot 60}{90} = 20 \text{ мкФ};$$

б) определим эквивалентную емкость $C_{э2}$ параллельного соединения конденсаторов $C_{э1}$ и C_3 . Согласно формуле (3.58):

$$C_{э2} = C_{э1} + C_3 = 20 + 10 = 30 \text{ мкФ};$$

в) определим общую емкость C как эквивалентную емкость последовательного соединения C_1 и $C_{э2}$. Так как $C_1 = C_{э2}$, то согласно формуле (3.51) получим

$$C = \frac{C_1}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ мкФ}.$$

2. Распределение напряжений и зарядов в цепи:

а) определим общий заряд цепи в соответствии с формулой (1.34):

$$Q = CU = 15 \cdot 10^{-6} \cdot 120 = 18 \cdot 10^{-4} \text{ Кл};$$

б) определим заряды на участках цепи C_1 и $C_{э2}$. Конденсаторы C_1 и $C_{э2}$ соединены последовательно, поэтому согласно формуле (3.48) заряды на них равны:

$$Q_1 = Q_{э2} = Q = 18 \cdot 10^{-4} \text{ Кл};$$

в) определим напряжения на участках цепи C_1 и $C_{э2}$. Так как $C_1 = C_{э2}$ и $Q_1 = Q_{э2}$, то согласно формуле (1.34) $U_1 = U_3$. Тогда в соответствии с формулой (3.55) получим

$$U_1 = U_3 = U/2 = 120/2 = 60 \text{ В};$$

г) определим заряд на участке C_3 в соответствии с формулой (1.34):

$$Q_3 = C_3 U_3 = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 60 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Кл};$$

д) определим заряды на последовательно соединенных конденсаторах C_2 и C_4 :

$$Q_2 = Q_4 = Q_{32} - Q_3 = 18 \cdot 10^{-4} - 6 \cdot 10^{-4} = 12 \cdot 10^{-4} \text{ Кл};$$

е) определим напряжения U_2 и U_4 :

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{12 \cdot 10^{-4}}{30 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ В}; \quad U_4 = U_3 - U_2 = 60 - 40 = 20 \text{ В}.$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определения понятий: «простая и сложная цепь», «узел», «ветвь», «контур», «независимый контур».
2. Для каких цепей применим расчет методом «свертки» и в чем его суть?
3. Опишите порядок расчета сложных цепей методом уравнений Кирхгофа.
4. В чем заключается суть метода наложения? Каковы его преимущества и недостатки?
5. Когда целесообразно применение метода двух узлов? Каковы особенности метода?
6. Какие электрические цепи называют электростатическими?
7. Каковы особенности последовательного и параллельного соединения конденсаторов?

Глава 4

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

4.1. Основные понятия нелинейных цепей

Нелинейные элементы и их вольт-амперные характеристики. Элементы цепей постоянного тока подразделяются на элементы, обладающие сопротивлением и обладающие емкостью. Как известно (см. подразд. 2.4), элемент электрической цепи называется линейным, если значение его сопротивления или емкости постоянно. Теоретически никакой элемент цепи не является линейным. Например, при протекании тока в проводнике выделяется тепловая мощность и изменяется температура, а следовательно, и его сопротивление. Однако если изменение невелико и им можно пренебречь, элемент можно считать линейным.

Нелинейным элементом (НЭ) называется элемент электрической цепи, сопротивление которого или емкость зависит от тока в нем или от напряжения на его выводах. *Электрическая цепь называется нелинейной при наличии в ней одного или нескольких нелинейных элементов.*

Свойства элементов электрических цепей наиболее просто и наглядно анализировать по графикам: для сопротивлений (элементов, характеризующихся сопротивлением) — по вольт-амперной характеристике; для емкостей — по кулон-вольтной характеристике. Обобщенно эти характеристики называются *вольт-амперными характеристиками (ВАХ)*. Для нелинейных элементов графики являются не прямыми, как для линейных элементов, а некоторыми кривыми или кусочно-линейными (ломаными) линиями. Поэтому для нелинейных элементов на электрических схемах замещения принято специальное обозначение, указывающее на нелинейный характер их ВАХ (рис. 4.1).

Классификация нелинейных элементов. В настоящее время создано большое число разнообразных нелинейных элементов, которые с развитием науки и техники неуклонно растут. В связи с этим не представляется возможным дать их всеобъемлющий перечень. Однако можно дать относительно исчерпывающую характеристику нелинейных элементов, представив их *классификацию** по каким-либо признакам.

* *Классификация* — это распределение объектов на группы по каким-либо существенным признакам.

Например, в основу классификации положим *тип проводимости*.

Нелинейные элементы обладают либо *двухсторонней*, либо *односторонней проводимостью* в зависимости от того, какие электрофизические явления заложены в основу создания нелинейного элемента (прибора). Тип проводимости определяет характер вольт-амперной характеристики элемента.

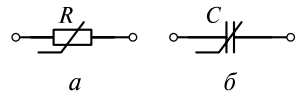


Рис. 4.1. Обозначения нелинейных элементов в схемах:

а — нелинейное сопротивление; *б* — нелинейная емкость

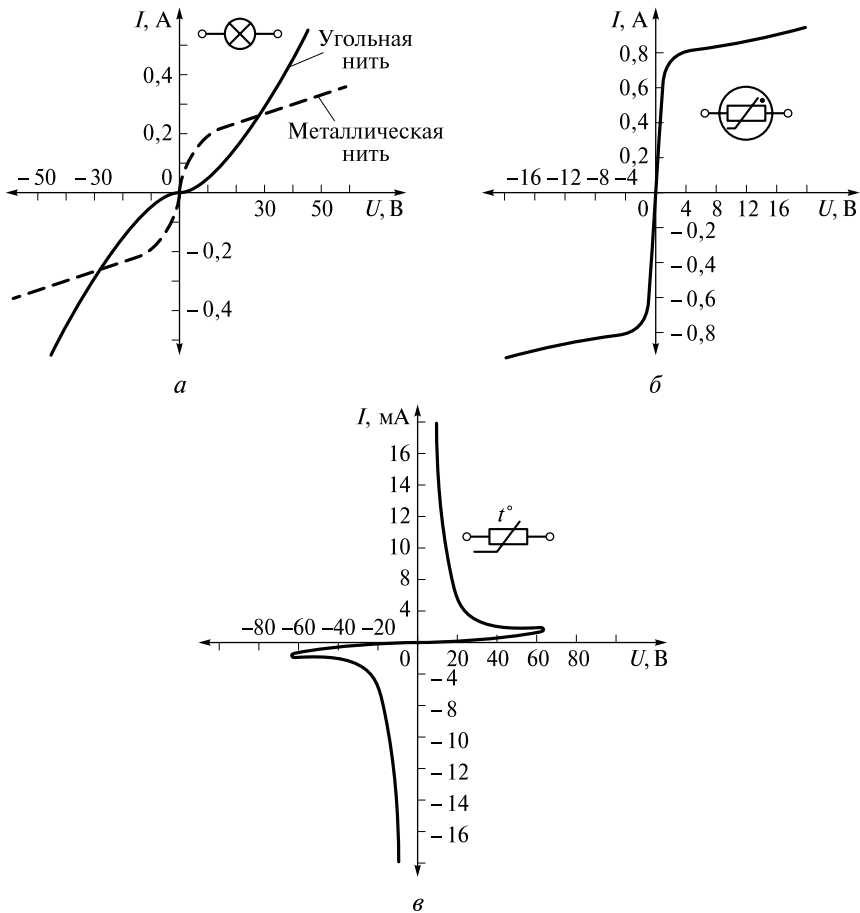


Рис. 4.2. Вольт-амперные характеристики симметричных нелинейных элементов:

а — лампы накаливания; *б* — бареттера; *в* — терморезистора

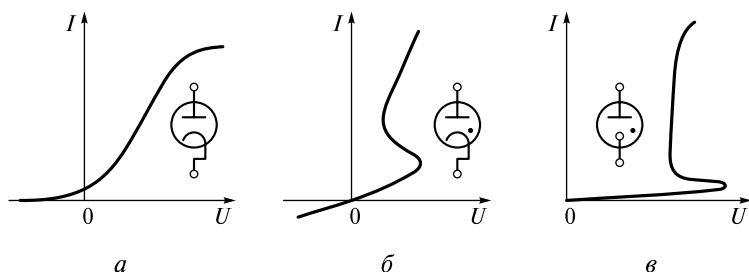


Рис. 4.3. Вольт-амперные характеристики несимметричных электронных нелинейных элементов:

a — кенодрона; *б* — газотрона; *в* — газоразрядного стабилитрона

Нелинейные элементы с двухсторонней проводимостью. Эти элементы имеют вольт-амперную характеристику, симметричную относительно осей координат, которая обладает следующим свойством: $f(U) = -f(-U)$, где $f(U) = I$. Это означает, что если ВАХ симметричная, то при изменении полярности напряжения изменится только направление тока, значение тока останется прежним. Такие нелинейные элементы называются *симметричными*.

К симметричным элементам относятся такие приборы, как лампы накаливания, бареттеры, терморезисторы и др. Принцип их действия основан на явлении электронной проводимости металлов, сопротивление которых существенно зависит от температуры. ВАХ перечисленных приборов и их обозначения в электрических схемах представлены на рис. 4.2.

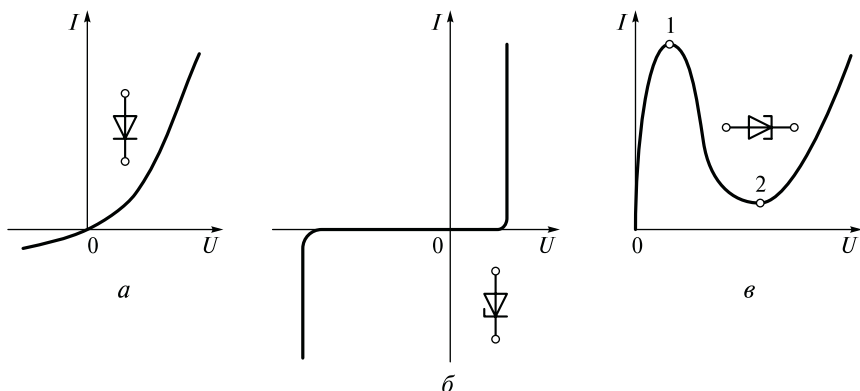


Рис. 4.4. Вольт-амперные характеристики несимметричных полупроводниковых нелинейных элементов:

a — полупроводникового диода; *б* — кремниевого стабилитрона; *в* — туннельного диода

Нелинейные элементы с односторонней проводимостью. Эти элементы имеют несимметричную относительно осей координат вольт-амперную характеристику. Их ВАХ обладает следующим свойством: $f(U) \neq -f(-U)$. Такие нелинейные элементы называются *несимметричными*. Несимметричные нелинейные элементы характеризуются тем, что проводят ток преимущественно только в одном (прямо) направлении. К ним относятся диоды, стабилитроны и т.д.

Принцип действия несимметричных нелинейных элементов, основан на явлениях прохождения тока в вакууме, газах и полупроводниках.

ВАХ отдельных приборов с односторонней проводимостью и их обозначения в электрических схемах показаны на рис. 4.3 (электронных приборов) и рис. 4.4 (полупроводниковых приборов)

Наличие в лампах газов указывается черным кружком (точкой) внутри условного изображения прибора.

4.2. Расчет нелинейных электрических цепей постоянного тока

Для нелинейных электрических цепей применяются графические и аналитические методы расчета. Наиболее просто расчет нелинейных цепей осуществляется графическими методами, которые применимы при любом виде вольт-амперных характеристик.

Графический метод расчета нелинейных электрических цепей. Рассмотренные ранее аналитические методы расчета линейных цепей непригодны для расчета нелинейных цепей из-за неоднозначности значений сопротивлений (емкостей) нелинейных элементов — зависимости сопротивлений (емкостей) от приложенных к ним напряжений. Кроме того, для большинства нелинейных элементов, применяемых на практике, нет аналитических выражений этой зависимости.

Однако для нелинейных цепей остаются справедливыми законы Ома и Кирхгофа. Для решения различных задач, относящихся к нелинейным цепям, применяют графический метод расчета, связанный с построением и дальнейшим использованием ВАХ заданного соединения элементов на основе законов Ома и Кирхгофа.

В большинстве случаев при расчете нелинейных цепей сначала необходимо выполнить подготовительный этап:

а) построить вольт-амперные характеристики элементов, входящих в цепь, в одной системе координат;

б) построить общую вольт-амперную характеристику заданного соединения элементов, учитывая особенности способа соединения.

Рассмотрим графический расчет нелинейных цепей при разных способах соединения нелинейных элементов.

Последовательное соединение двух нелинейных элементов. Прежде чем решать какие-либо задачи по указанному соединению нелинейных элементов, сформулируем особенности последовательного соединения элементов:

- при любом значении общего напряжения U ток I в отдельных участках цепи одинаков;
- при любом значении тока в цепи общее напряжение U в соответствии со вторым законом Кирхгофа равно сумме напряжений на отдельных участках цепи.

Исходя из этого для построения общей вольт-амперной характеристики при последовательном соединении элементов достаточно выбрать на оси тока несколько значений силы тока и для каждого из значений сложить абсциссы точек заданных кривых $НЭ_1$ и $НЭ_2$, соответствующие напряжениям на нелинейных элементах. Получим абсциссы общих напряжений для выбранных значений тока и соответственно точки общей вольт-амперной характеристики. Через полученные точки проведем кривую $НЭ_{эКВ}$ — общую вольт-амперную характеристику последовательного соединения элементов.

Рассмотрим пример решения возможных задач последовательного соединения нелинейных элементов.

Пример 4.1. При заданном значении общего напряжения ($U = U_0$) цепи (рис. 4.5) определить силу тока I и напряжения $U_{НЭ_1}$ и $U_{НЭ_2}$ на нелинейных элементах. Вольт-амперные характеристики нелинейных элементов известны и представлены в одной системе координат на рис. 4.6 (кривые $НЭ_1$ и $НЭ_2$).

Решение.

1. Построение общей вольт-амперной характеристики последовательного соединения двух нелинейных элементов. Выберем на оси ординат (см. рис. 4.6) точку 1 (отрезок 0—1 соответствует силе тока $I = I_1$) и проведем через нее прямую, параллельную оси абсцисс. Получим точки 2, 3 пересечения прямой с кривыми $НЭ_1$ и $НЭ_2$. Отрезки 1—2 и 1—3 соответствуют значениям напряжений на нелинейных элементах при значении силы тока $I = I_1$: $U_{НЭ_1} = U_1$ и $U_{НЭ_2} = U_2$. Так как общее напряжение цепи равно сумме напряжений на отдельных участках (особенности последовательного соединения элементов), то, сложив указанные отрезки, мы получим отрезок 1—4, соответствующий общему напряжению цепи U_3 при значении силы тока I_1 : $U_3 = U_1 + U_2$. Точка 4 — одна из точек общей вольт-амперной характеристики.

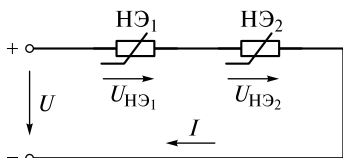


Рис. 4.5. Схема последовательного соединения нелинейных элементов

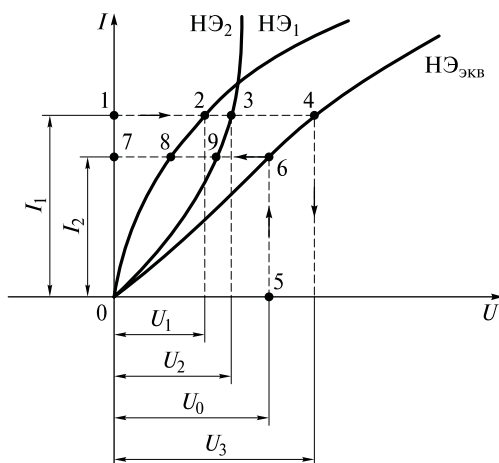


Рис. 4.6. Построение ВАХ последовательного соединения

Аналогично найдем еще ряд точек общей вольт-амперной характеристики для других значений силы тока цепи. Через полученные точки проведем общую вольт-амперную характеристику заданного соединения элементов (кривая $HЭ_{экв}$ на рис. 4.6).

2. Определение силы тока и напряжений на нелинейных элементах. Находим точку на оси абсцисс, соответствующую значению заданного напряжения U_0 в выбранном масштабе напряжений (например, это точка 5 на рис. 4.6). Проводим через найденную точку перпендикуляр до пересечения с общей вольт-амперной характеристикой (кривая $HЭ_{экв}$, точка 6).

Из точки 6 проводим линию, параллельную оси абсцисс. Отрезок 0—7 на оси токов выражает силу тока в цепи $I = I_2$ в выбранном масштабе по оси тока, отрезки 7—8 и 7—9 — напряжения на нелинейных элементах соответственно $U_{HЭ1}$ и $U_{HЭ2}$ в выбранном масштабе по оси напряжений.

Пользуясь графическим методом, легко решить и другие задачи последовательного соединения нелинейных элементов, например:

а) в цепи (см. рис. 4.5) определить силу тока I и напряжения $U_{HЭ1}$ и U при заданном напряжении $U_{HЭ2}$ и известных вольт-амперных характеристиках нелинейных элементов, представленных в одной системе координат;

б) при заданном значении силы тока I в цепи (см. рис. 4.5) и известных вольт-амперных характеристиках нелинейных элементов, представленных в одной системе координат, определить напряжения $U_{HЭ1}$, $U_{HЭ2}$ и U и т.д.

При последовательном соединении нелинейного элемента с линейным элементом, а также при соединении более двух эле-

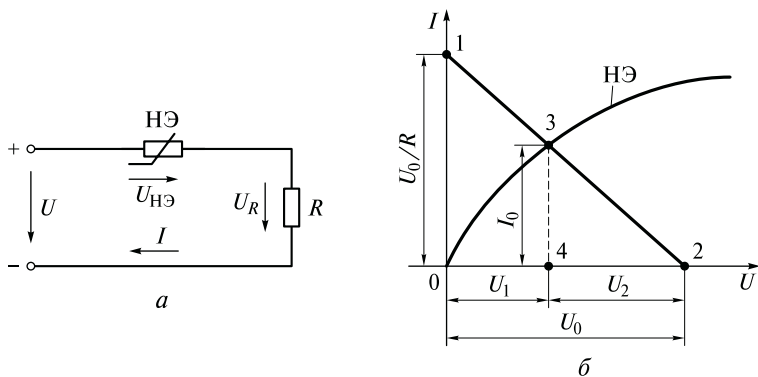


Рис. 4.7. Незаветвленная цепь с линейным и нелинейным элементами:
 а — схема цепи; б — графический расчет методом пересечений

ментов (линейных и нелинейных) задачи решаются аналогичным образом.

Метод пересечений. Для последовательного соединения нелинейного и линейного элементов имеется более рациональный метод решения — *метод пересечений*.

Пример 4.2. Задана незаветвленная цепь (рис. 4.7, а), содержащая нелинейный элемент с известной вольт-амперной характеристикой и линейный элемент с известным сопротивлением R . Определить силу тока I в цепи и напряжения на ее участках ($U_{НЭ}$ и U_R) при заданном общем напряжении $U = U_0$.

Решение. Рассмотрим решение задачи по этапам.

1. Составим уравнение тока в заданной цепи. Так как в незаветвленной цепи ток одинаков во всех элементах, то его можно выразить по закону Ома для участка цепи с сопротивлением R :

$$I = U_R/R = (U_0 - U_{НЭ})/R. \quad (4.1)$$

Из выражения (4.1) следует, что при известных значениях U_0 и R , ток линейно зависит от напряжения $U_{НЭ}$.

2. Построим график зависимости тока от напряжения $U_{НЭ}$ на нелинейном элементе.

Так как график тока — прямая линия, он может быть построен по двум точкам, соответствующим предельным значениям напряжения на нелинейном элементе $U_{НЭ}$:

- минимальное значение напряжения на нелинейном элементе: $U_{НЭ \min} = 0$. В этом случае согласно формуле (4.1) в цепи протекает максимальный ток:

$$I = I_{\max} = U_R/R = U_0/R;$$

• максимальное значение напряжения на нелинейном элементе $U_{НЭ \max}$ согласно формуле (4.1): $U_{НЭ \max} = U_0$. При этом ток I в цепи минимальный:

$$I_{\min} = (U_0 - U_0)/R = 0.$$

Таким образом, график зависимости тока от напряжения на нелинейном элементе построим по двум точкам с координатами:

1 точка: $U_{НЭ} = U_{НЭ \min} = 0$; $I_{\max} = U_0/R$.

2 точка: $U_{НЭ} = U_{НЭ \max} = U_0$; $I_{\min} = 0$.

График представлен на рис. 4.7, б.

3. Определим силу тока I в цепи и напряжения на ее участках по координатам точки пересечения построенных графиков.

На рис. 4.7, б в той же системе координат построим вольт-амперную характеристику заданного нелинейного элемента.

Точка пересечения графиков (точка 3) дает решение поставленной задачи. Отрезок 3—4 соответствует значению силы тока в цепи $I = I_0$ в выбранном масштабе по оси тока.

Напряжение на нелинейном элементе $U_{НЭ}$, соответствующее силе тока I_0 , определяется отрезком 0—4 в выбранном масштабе по оси напряжений: $U_{НЭ} = U_1$.

Так как при последовательном соединении общее напряжение цепи равно сумме напряжений на отдельных участках, напряжение на сопротивлении U_R определяем как $U_R = U_2 = U_0 - U_{НЭ} = U_0 - U_1$. На рис. 4.7, б напряжение U_R соответствует отрезку 2—4 в выбранном масштабе по оси напряжений, равному разности отрезков 0—2 и 0—4.

Параллельное соединение двух нелинейных элементов. При решении задач параллельного соединения нелинейных элементов, как и при последовательном соединении, необходимо выполнить подготовительный этап: построить общую ВАХ по известным ВАХ заданных нелинейных элементов, используя при этом особенности рассматриваемого соединения.

Особенности параллельного соединения элементов:

• напряжение на параллельно соединенных участках цепи одинаково;

• общий ток I равен сумме токов параллельных участков цепи.

Рассмотрим пример графического расчета параллельного соединения нелинейных элементов.

Пример 4.3. В цепи (рис. 4.8, а) определить общий ток I и токи в ветвях I_1 и I_2 , если задано напряжение цепи $U = U_1$ и известны вольт-амперные характеристики нелинейных элементов (кривые НЭ₁ и НЭ₂, представленные в одной системе координат на рис. 4.8, б).

Решение.

Выберем на оси напряжения (см. рис. 4.8, б) точку 1 (отрезок 0—1 соответствует напряжению $U = U_1$ в выбранном по оси на-

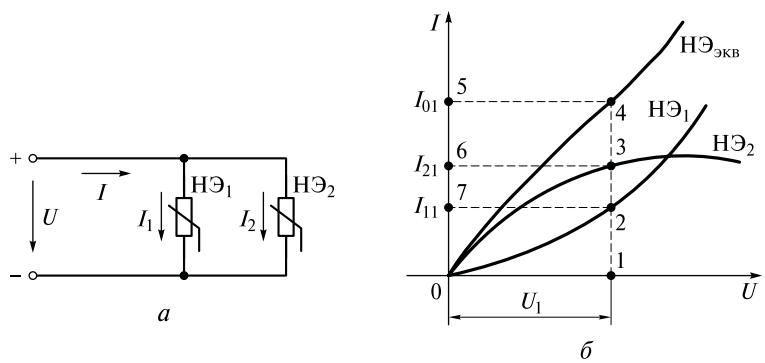


Рис. 4.8. Параллельное соединение нелинейных элементов:
a — схема соединения; *б* — построение общей ВАХ

пряжения масштабе) и проведем через нее прямую, параллельную оси ординат. Получим точки 2, 3 пересечения прямой с кривыми $HЭ_1$ и $HЭ_2$. Отрезки 1—2 и 1—3 в выбранном масштабе токов соответствуют значениям токов $I_1 = I_{11}$ и $I_2 = I_{21}$ в ветвях цепи при значении напряжения $U = U_1$.

Так как общий ток в цепи равен сумме токов на отдельных участках, то, сложив отрезки 1—2 и 1—3, мы получим отрезок 1—4, соответствующий значению общего тока в цепи $I = I_{01} = I_{11} + I_{21}$ при значении напряжения $U = U_1$.

Точка 4 — одна из точек общей вольт-амперной характеристики. Для решения рассмотренной задачи нам достаточно было построить только одну точку общей ВАХ соединения нелинейных элементов. Для решения других задач может потребоваться построение всей общей ВАХ рассматриваемого соединения нелинейных элементов, например при решении следующей задачи.

В цепи (см. рис. 4.8, *a*) по заданному току I_2 и известным вольт-амперным характеристикам нелинейных элементов определить напряжение U цепи и токи I и I_1 .

Аналогичным образом решаются задачи при параллельном соединении нелинейного элемента с линейным элементом, а также при соединении более двух элементов (линейных и нелинейных).

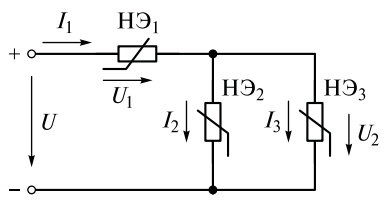


Рис. 4.9. Схема смешанного соединения нелинейных элементов

Смешанное соединение элементов. При смешанном соединении для расчета цепи применяется метод «свертывания» схемы заданной цепи.

Пример 4.4. При заданном напряжении $U = U_{01}$ цепи (рис. 4.9) и известных вольт-амперных характеристиках нелинейных элементов

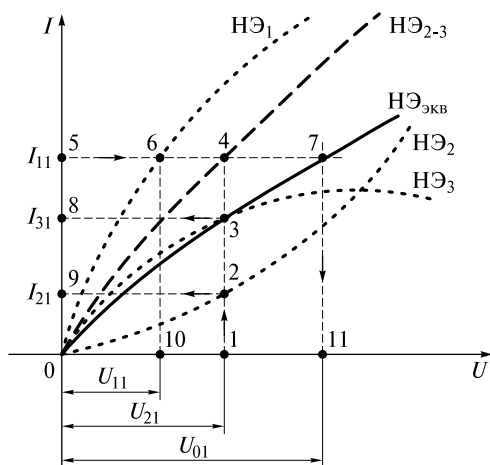


Рис. 4.10. Построение ВАХ смешанного соединения

цепи, представленных в одной системе координат (рис. 4.10, кривые $NЭ_1$, $NЭ_2$, $NЭ_3$), определить токи I_1 , I_2 , I_3 в нелинейных элементах и напряжения на участках цепи U_1 и U_2 .

Решение.

1. Построение эквивалентной вольт-амперной характеристики заданной цепи:

а) в схеме заданной цепи имеется одно простое соединение — параллельное соединение нелинейных элементов $NЭ_2$ и $NЭ_3$. Используя особенности параллельного соединения, построим для указанного соединения общую вольт-амперную характеристику;

б) заменим участок с параллельным соединением эквивалентным нелинейным элементом $NЭ_{2-3}$. Упрощенная схема представляет собой последовательное соединение $NЭ_1$ и $NЭ_{2-3}$;

в) построим вольт-амперную характеристику для упрощенной схемы, используя особенности последовательного соединения. Она и является эквивалентной вольт-амперной характеристикой «свернутой» цепи, состоящей из одного нелинейного элемента $NЭ_{экв}$.

2. Определение силы тока I_1 . Ток I_1 определим в «свернутой» схеме по вольт-амперной характеристике эквивалентного нелинейного элемента (см. рис. 4.10, кривая $NЭ_{экв}$). Для этого на оси напряжений отложим отрезок $0-11$, соответствующий значению U_{01} в выбранном масштабе по оси напряжений. Через точку 11 восставим перпендикуляр до пересечения с кривой $NЭ_{экв}$ в точке 7 . Проведем линию, параллельную оси абсцисс, до пересечения с осью токов в точке 5 . Отрезок $0-5$ соответствует силе тока $I_1 = I_{11}$ в выбранном масштабе по оси токов.

3. Определение напряжений U_1 и U_2 . Развернем схему: рассмотрим последовательное соединение нелинейных элементов

НЭ₁ и НЭ₂₋₃. Зная силу тока $I_1 = I_{11}$ в нелинейном элементе НЭ₁, по вольт-амперной характеристике (кривая НЭ₁) определим напряжение. Для этого найдем точку пересечения линии 5—7 с кривой НЭ₁ (точка б) и опустим из нее перпендикуляр до пересечения с осью напряжений в точке 10. Отрезок 0—10 соответствует напряжению $U_1 = U_{11}$ в выбранном масштабе по оси напряжений.

Аналогично найдем напряжение $U_2 = U_{21}$ по вольт-амперной характеристике (кривая НЭ₂₋₃). Оно соответствует отрезку 0—1.

4. Определение силы токов I_2 и I_3 . Напряжение U_2 одинаково на каждом из нелинейных элементов НЭ₂ и НЭ₃. По известному напряжению U_2 и кривым НЭ₂ и НЭ₃ легко определить токи I_2 и I_3 . Для этого восставим из точки 1 перпендикуляр до пересечения с кривыми НЭ₂ и НЭ₃ в точках 2 и 3. Отрезки 1—2 (0—9) и 1—3 (0—8) соответствуют значениям силы токов $I_2 = I_{21}$ и $I_3 = I_{31}$ в выбранном масштабе по оси токов.

Аналитический метод расчета нелинейных электрических цепей.

Помимо графического метода возможен и аналитический метод расчета нелинейной цепи. Он предоставляет возможность заменить нелинейные элементы эквивалентными схемами замещения с линейными элементами, после чего нелинейная цепь может быть рассчитана одним из методов, применяемых для расчета линейных цепей. Поэтому его широко используют при создании систем автоматического управления, особенно в цифровых системах на базе ЭВМ.

Для характеристики нелинейного элемента принято два понятия сопротивлений: статическое и динамическое.

Статическое сопротивление. *Статическим сопротивлением* элемента $R_{ст}$ в данной точке вольт-амперной характеристики называется отношение напряжения и тока этой точки.

Например, для точки a вольт-амперной характеристики (рис. 4.11, a)

$$R_{ст} = \frac{U_a}{I_a} = \frac{m_U \overline{af}}{m_I \overline{Of}} = m_R \operatorname{tg} \alpha, \quad (4.2)$$

где m_U и m_I — масштабы напряжения и тока соответственно; m_R — масштаб сопротивления, $m_R = m_U/m_I$.

Из формулы (4.2) следует, что статическое сопротивление пропорционально тангенсу угла α . Для вогнутой вольт-амперной характеристики (см. рис. 4.11, a) на участке Oa с увеличением напряжения статическое сопротивление уменьшается.

Дифференциальное (динамическое) сопротивление. Под дифференциальным сопротивлением $R_{диф}$ в данной точке ВАХ элемента понимают отношение бесконечно малых при-

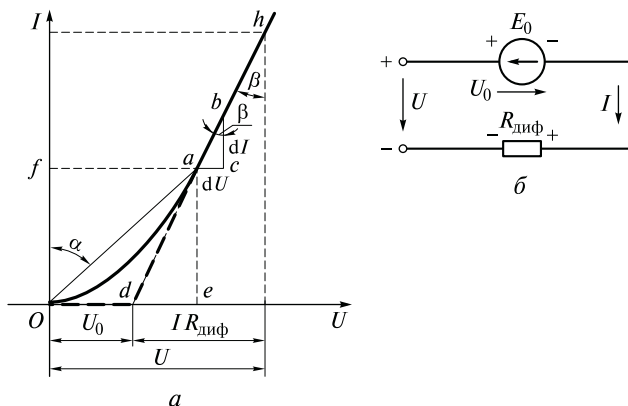


Рис. 4.11. Вогнутая вольт-амперная характеристика (а) и схема замещения нелинейного элемента (б)

ращений напряжения dU и тока dI . Например, для точки a (см. рис. 4.11, а) запишем

$$R_{\text{диф}} = \frac{dU}{dI} \cong \frac{m_U \overline{ac}}{m_I \overline{bc}} = m_R \operatorname{tg} \beta. \quad (4.3)$$

Дифференциальное сопротивление пропорционально тангенсу угла β наклона касательной, проведенной через точку a .

Схемы замещения нелинейного элемента. Продолжим касательную в точке a (прямую $h-b-a$) до пересечения с осью напряжений (в точке d). Отрезок Od в принятом масштабе напряжений выражает постоянное напряжение U_0 . Если заменить вогнутую вольт-амперную характеристику (см. рис. 4.11, а) ломаной линией, состоящей из отрезков Od и dh , то напряжение в любой точке прямолинейного участка вольт-амперной характеристики можно выразить уравнением

$$U = U_0 + IR_{\text{диф}}. \quad (4.4)$$

На основании полученного уравнения нелинейный элемент можно представить схемой (рис. 4.11, б) последовательного соединения ЭДС $E_0 = U_0$ и сопротивления, равного дифференциальному сопротивлению $R_{\text{диф}}$, определенному для выбранного прямолинейного (с достаточным приближением) участка.

Сила тока в представленной схеме замещения определяется по обобщенному закону Ома (см. формулу (2.35)), что соответствует выражению, полученному из формулы (4.4):

$$I = (U - E_0)/R_{\text{диф}}. \quad (4.5)$$

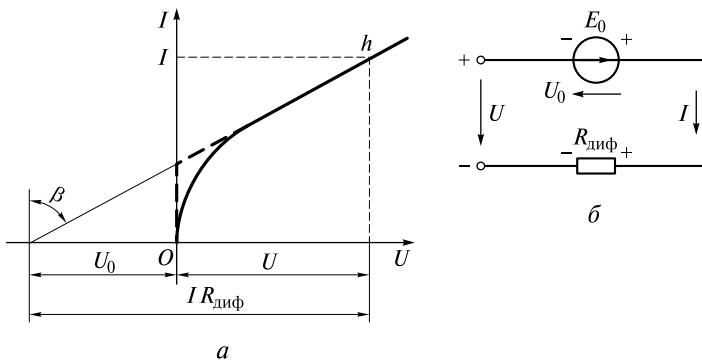


Рис. 4.12. Выпуклая вольт-амперная характеристика (а) и схема замещения нелинейного элемента (б)

Для случая выпуклой характеристики (рис. 4.12, а) аналогичные рассуждения приводят к уравнению

$$U = -U_0 + IR_{\text{диф}}. \quad (4.6)$$

На основании уравнения (4.6) нелинейный элемент с выпуклой характеристикой можно представить схемой (рис. 4.12, б), в которой направления ЭДС E_0 и тока совпадают, и ток

$$I = (U + E_0)/R_{\text{диф}}. \quad (4.7)$$

При расчете аналитическим методом необходимо учитывать, что дифференциальное сопротивление неодинаково в разных рабочих точках вольт-амперной характеристики нелинейного элемента. Значение $R_{\text{диф}}$ определяет наклон касательной и соответственно значение U_0 . Хотя уравнение напряжения и соответствующая ему схема замещения для всех точек вольт-амперной характеристики аналогичны, каждой ее точке соответствует свое значение $R_{\text{диф}}$ и U_0 .

Аналитический расчет нелинейной цепи упрощается, когда в рабочем диапазоне напряжения или тока вольт-амперные характеристики нелинейных элементов цепи с достаточным приближением можно заменить отрезками прямых.

Контрольные вопросы

1. Каковы особенности нелинейных цепей и почему рассмотренные в гл. 3 методы расчета не подходят для их расчета? Какие законы используются при расчете нелинейных цепей и в чем суть графического метода расчета?

2. Опишите алгоритм построения общей ВАХ для последовательного соединения нелинейных элементов.

3. В чем суть метода пересечений и в чем его преимущество?
4. Опишите алгоритм построения общей ВАХ для параллельного соединения нелинейных элементов.
5. Какой метод применяется при расчете токов и напряжений в смешанной нелинейной цепи? Опишите алгоритм построения общей ВАХ смешанного соединения элементов.
6. В чем заключается аналитический метод расчета нелинейных электрических цепей и каково его назначение? На чем основано построение схем замещения нелинейных элементов?
7. Какова суть понятий «статическое сопротивление» и «динамическое сопротивление» в данной точке ВАХ? Как отличаются их значения?

Глава 5

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

5.1. Основные характеристики магнитного поля

Опыты показывают, что вокруг проводника с током существует некое состояние среды, которое характеризуется силовым воздействием на магнитную стрелку, другие проводники с токами, помещенные вблизи. Такое состояние среды называется *магнитным полем*.

Магнитное поле, как и электрическое поле, является одним из видов материи. Оно возникает, например, в пространстве вокруг движущихся электрически заряженных частиц вещества и вокруг проводников с токами.

Электрический ток в проводе и магнитное поле вокруг него — неразрывно связанные явления.

Если в магнитное поле, окружающее провод с электрическим током, внести другой провод с током, то последний испытывает действие силы магнитного поля. В свою очередь магнитное поле второго провода с током действует на первый. Под действием сил поля провод с током может перемещаться (притягиваться или отталкиваться); в этом случае производится работа за счет энергии магнитного поля. Таким образом, магнитное поле обладает энергией, которая называется *энергией магнитного поля*.

Закон Ампера. Закон определяет силу взаимодействия между проводниками с токами (рис. 5.1, а), т.е. между их магнитными полями.

А. М. Ампер установил, что сила взаимодействия $F = F_{12} = F_{21}$ между двумя параллельными элементами тока зависит от определяющих величин:

- элементов тока $I_1 dl_1$ и $I_2 dl_2$;
- расстояния r между элементами тока;
- абсолютной магнитной проницаемости среды μ_a ;
- синуса угла α ($\sin \alpha$) между одним из элементов тока и линией, соединяющей элементы тока.

Согласно закону Ампера элементарная сила взаимодействия двух элементов тока

$$dF = \frac{\mu_a I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi r^2} \sin \alpha, \quad (5.1)$$

т.е. сила взаимодействия между двумя элементами линейных токов пропорциональна произведению элементов тока и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

Коэффициент μ_a характеризует влияние среды на силу магнитных полей. Для всех сред, кроме ферромагнитных материалов (см. гл. 6), μ_a является постоянной величиной, не зависящей от тока или напряжения. Такие среды называются *линейными*.

Магнитная индукция. Сила взаимодействия F характеризует совместное магнитное поле, создаваемое взаимодействующими проводниками с токами. Для характеристики интенсивности магнитного поля отдельного тока введено понятие *магнитной индукции*, обозначаемой буквой B .

Магнитная индукция B в какой-либо точке поля вокруг провода с электрическим током равна силе, действующей на единичный элемент тока, мысленно внесенный в рассматриваемую точку поля.

Тогда в соответствии с законом Ампера (см. формулу (5.1)) магнитная индукция dB_1 элемента тока $I_1 dl_1$ (см. рис. 5.1, а) в точке расположения элемента тока $I_2 dl_2$:

$$dB_1 = \frac{dF}{I_2 dl_2}. \quad (5.2)$$

Подставив формулу (5.1) в выражение (5.2), для элемента тока $I_1 dl_1$ (в общем случае для любого элемента тока Idl) в точке на расстоянии r от него получим значение элементарной индукции:

$$dB = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}. \quad (5.3)$$

Выражение (5.3) полностью соответствует *закону Био—Савара*, полученному опытным путем, и носит его название.

Магнитная индукция — величина векторная, аналогичная напряженности электрического поля. Но в отличие от напряженно-

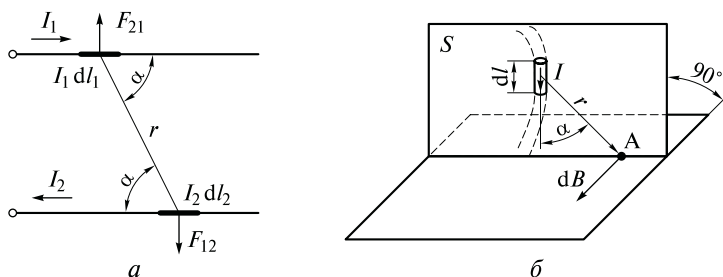


Рис. 5.1. Силы взаимодействия двух элементов тока (а) и направление вектора индукции (б)

сти электрического поля, вектор которой совпадает с направлением силы, действующей на точечный положительный заряд, направление вектора магнитной индукции не совпадает с направлением силы, действующей на проводник с током.

Вектор индукции направлен перпендикулярно плоскости S , в которой расположены элемент тока Idl , создающий индукцию $d\vec{B}$, и радиус-вектор r . Для удобства при определении направления вектора индукции пользуются *правилом буравчика (правоходового винта)*: если буравчик движется вдоль элемента провода по направлению тока, то каждый конец его рукоятки проходит сквозь плоскость S в том же направлении, в котором ее пронизывает вектор индукции (рис. 5.1, б).

Если изменить направление тока в проводе, то изменится на противоположное и направление вектора магнитной индукции.

Для определения общей индукции, создаваемой магнитным полем всего проводника с током в какой-либо точке поля, необходимо применить *метод суперпозиции (принцип наложения)*, т.е. определить геометрическую сумму элементарных векторов магнитной индукции $d\vec{B}$ от элементарных токов проводника, учитывая форму проводника:

$$\vec{B} = \int d\vec{B}. \quad (5.4)$$

Если магнитное поле создается несколькими проводниками с токами, то для определения индукции их общего магнитного поля в какой-либо точке совместного поля необходимо также применить метод суперпозиции (принцип наложения). Например, для двух параллельных проводников с токами I_1 и I_2 (рис. 5.2, а)* в линейной среде в точке A , находящейся на расстояниях r_1 и r_2 от осей проводников, индукция суммарного магнитного поля равна геометрической сумме векторов индукций первого и второго проводников B_1 и B_2 соответственно.

По формулам (5.3) и (5.4) можно найти магнитную индукцию для проводов различной формы с токами. Рассмотрим пример определения суммарной магнитной индукции в какой-либо точке поля конкретного объекта.

Магнитная индукция в центре кольцевого проводника с током. На рис. 5.2, б изображен кольцевой проводник (виток) с током I . Определим индукцию магнитного поля в центре этого витка (точка O).

Для каждого элемента тока Idl кольцевого проводника с током I радиус-вектор r равен радиусу кольца R и лежит в плоскости

* На рис. 5.2 и далее везде крестиком (\oplus) помечается направление вектора, перпендикулярного плоскости рисунка и направленного «от нас», например направление токов на рис. 5.2, а. Направление «на нас» помечается точкой (\odot).

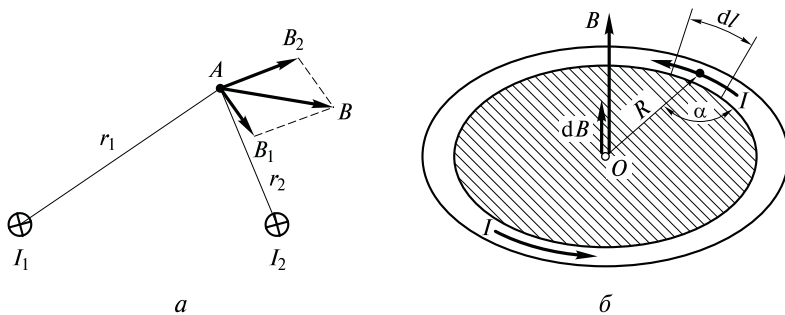


Рис. 5.2. Построение суммарного вектора магнитной индукции поля, создаваемого двумя проводниками с токами (а), и магнитная индукция в центре кругового тока (б)

кольца. Отсюда следует, что все элементарные составляющие вектора индукции dB в центре кольца имеют одинаковое направление.

Кроме того, угол α для каждого элемента тока $I dl$ одинаков $\alpha = 90^\circ$, а $\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1$.

Следовательно, в соответствии с законом Био—Савара (см. формулу (5.3)) составляющая магнитной индукции dB каждого элемента тока $I dl$ в центре кольца одинакова:

$$dB = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{I dl}{R^2}.$$

Для определения магнитной индукции в центре проводника воспользуемся формулой (5.4). Для этого определим сумму значений dB от каждого элемента тока по всей длине проводника, т. е. по окружности:

$$\bar{B} = \oint dB = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint dl,$$

где $\oint dl$ обозначает суммирование по замкнутому контуру, в данном случае по окружности радиуса R .

Так как сумма элементов окружности равна ее длине, т. е. $2\pi R$, то магнитная индукция в центре кольцевого проводника с током

$$B = \frac{\mu_a I}{2R} = \frac{\mu_a I}{D}, \quad (5.5)$$

где D — диаметр кольца, $D = 2R$.

Единицы измерения магнитной индукции. Для определения единицы измерения магнитной индукции воспользуемся выражением (5.2):

$$[B] = \left[\frac{F}{Il} \right] = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = \text{Тл}.$$

Произведение единиц «вольт» и «секунда» ($\text{В} \cdot \text{с}$) носит название «вебер», Вб, а вебер, отнесенный к квадратному метру, имеет название «тесла», Тл.

Таким образом, в Международной системе единиц (СИ) магнитная индукция B измеряется в веберах, отнесенных к квадратному метру, или теслах.

Тесла — крупная единица, поэтому при расчетах часто пользуются более мелкой единицей, не принадлежащей к системе СИ, — единицей, носящей название «гаусс», Гс:

$$1 \text{ Гс} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ Тл} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ Вб/м}^2.$$

Магнитная проницаемость среды. Нам известно, что такие характеристики магнитного поля, как сила взаимодействия (см. формулу (5.1)) и индукция (см. формулу (5.3)), зависят от свойств той среды, в которой создается магнитное поле, и эта зависимость характеризуется значением абсолютной магнитной проницаемости μ_a .

Единица измерения абсолютной магнитной проницаемости μ_a может быть получена из формулы (5.5):

$$[\mu_a] = [BD/l] = \text{Тл} \cdot \text{м/А} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \frac{\text{м}}{\text{А}} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}. \quad (5.6)$$

Произведение $\text{Ом} \cdot \text{с}$ имеет название «генри», Гн. Генри является единицей измерения индуктивности — величины, с которой мы познакомимся далее.

Сравнивая магнитное поле исследуемого объекта в различных средах и в вакууме, можно убедиться в том, что абсолютная магнитная проницаемость μ_a имеет различные значения для разных сред.

Кроме того, одни среды ослабляют поле (по сравнению с полем в вакууме), а другие среды его усиливают. Суть этих явлений описана в подразд. 5.3.

Среды, усиливающие магнитные поля, называются *парамагнитными (парамагнетиками)*, а ослабляющие магнитные поля — *диамагнитными (диамагнетиками)*.

Абсолютная магнитная проницаемость вакуума называется *магнитной постоянной* и обозначается μ_0^* .

* В XIX в. было доказано теоретически и экспериментально подтверждено, что *магнитная постоянная* μ_0 и *электрическая постоянная* ϵ_0 связаны уравнением.

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2},$$

где c — скорость света в вакууме, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

При создании Международной системы единиц было установлено значение магнитной постоянной

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.} \quad (5.7)$$

Отношение абсолютной магнитной проницаемости среды какого-либо вещества μ_a к магнитной постоянной μ_0 называется *относительной магнитной проницаемостью среды* (сокращенно *магнитной проницаемостью*):

$$\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0}. \quad (5.8)$$

Магнитная проницаемость μ — величина безразмерная. Для *диамангнитных сред* (медь, серебро, ртуть, вода и др.) $\mu < 1$. Например, для меди $\mu = 0,999995$. Для *парамагнитных сред* (большинство веществ, например натрий, калий, алюминий, воздух и др.) $\mu > 1$. Например, для воздуха $\mu = 1,000003$.

В инженерных расчетах (электротехнических при конструировании приборов, машин и аппаратов) магнитная проницаемость диамагнитных и парамагнитных сред принимается равной единице.

Особую группу сред, значительно усиливающих внешнее магнитное поле, составляют так называемые *ферромагнитные материалы* (*ферромагнетики*): железо, никель, кобальт и другие, у которых магнитная проницаемость μ может достигать десятков тысяч. Они играют исключительно важную роль в электротехнике. Особенностью ферромагнитных материалов является непостоянство магнитной проницаемости — зависимость μ от значения интенсивности магнитного поля и температуры. Поэтому ферромагнитные материалы относятся к нелинейным средам.

Магнитные силовые линии. Для наглядности магнитное поле принято изображать графически линиями магнитной индукции (магнитными линиями).

Магнитные линии проводят так, чтобы вектор магнитной индукции в каждой точке был направлен по касательной к линии в этой точке.

Линии магнитной индукции вокруг прямолинейного проводника с током (рис. 5.3, а). Поскольку направление линий магнитной индукции определяется направлением вектора магнитной индукции, то оно зависит от направления тока в проводе и устанавливается *правилом буравчика*: *направление линий магнитной индукции вокруг провода с током совпадает с направлением вращения рукоятки буравчика, если поступательное движение буравчика совпадает с направлением тока в проводе.*

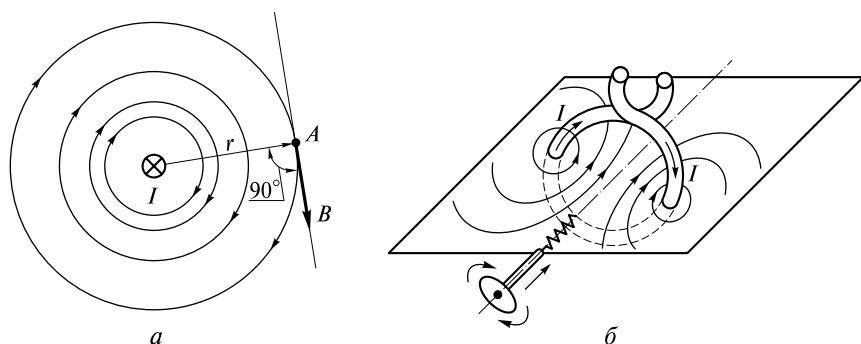


Рис. 5.3. Магнитные линии:

a — прямолинейного проводника с током; *б* — витка с током

Таким образом, каждая магнитная силовая линия вокруг прямолинейного проводника с током имеет форму окружности, центр которой лежит на оси провода.

При заданном направлении линий магнитной индукции правилом буравчика можно пользоваться для определения направления тока.

Линии магнитной индукции витка с током. Если проводник с током имеет форму витка или катушки (рис. 5.3, б), то для определения направления магнитного поля удобнее использовать правило буравчика в измененном виде: *если совместить направление вращения рукоятки с направлением тока в витке, то поступательное движение буравчика укажет направление магнитных линий, пронизывающих поверхность, ограниченную контуром тока.*

Магнитное поле цилиндрической катушки. Так как катушка (рис. 5.4, а) представляет собой последовательное соединение витков с одинаковым направлением тока в каждом из них, то ее магнитное поле представляет собой суммарное поле составляющих ее витков. Направление магнитных линий поля катушки определяется так же, как и у витка.

Для кругового движения тока (виток, катушка) часто пользуются еще и следующим правилом: *если охватить катушку (виток) правой рукой так, чтобы четыре пальца руки расположились по направлению тока в витках катушки, то отогнутый большой палец укажет направление индукции* (а следовательно, и магнитных линий, пронизывающих поверхность, ограниченную контуром тока).

Магнитное поле катушки по форме и проявлению подобно полю постоянного магнита кругового сечения (рис. 5.4, б). О постоянных магнитах и природе создаваемого ими магнитного поля более подробные сведения приведены в подразд. 5.3. На конце катушки, где линии магнитной индукции выходят из нее, образуется *северный полюс (N)*, на противоположном конце — *южный полюс (S)*.

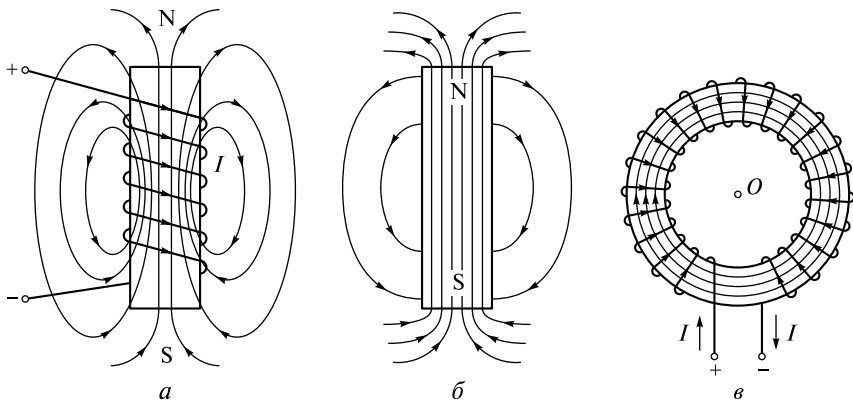


Рис. 5.4. Магнитные поля:

a — цилиндрической катушки с током; *б* — постоянного магнита; *в* — катушки с кольцевым магнитопроводом

Магнитное поле катушки с кольцевым магнитопроводом (рис. 5.4, *в*). Магнитные линии в магнитопроводе (сердечнике) имеют форму окружностей (что следует из условий симметрии), центры которых лежат на прямой, перпендикулярной плоскости рассматриваемого рисунка и проходящей через центр кольцевой катушки. Поле катушки характеризуется тем, что во всех точках одной и той же магнитной линии векторы индукции равны по величине, но направления векторов разные. Кроме того, длины магнитных линий внутри магнитопровода неодинаковы, и поле более интенсивно у внутренней стороны магнитопровода.

Магнитные линии двух параллельных проводников. На рис. 5.5 показано магнитное поле двух параллельных

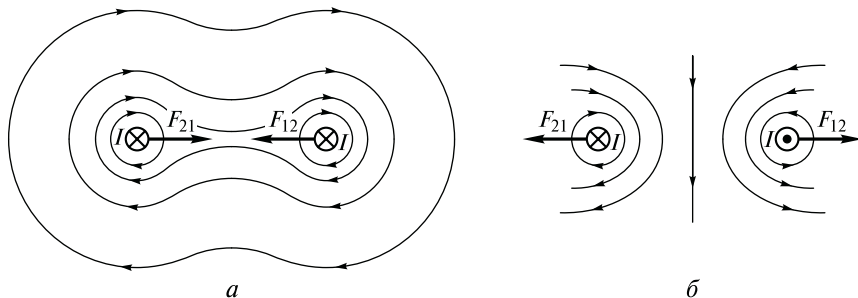


Рис. 5.5. Магнитные линии двух параллельных проводников с равными токами одинакового (*a*) и противоположного (*б*) направлений

проводников с равными токами при одинаковых (рис. 5.5, *а*) и противоположных (рис. 5.5, *б*) направлениях токов.

Картина магнитного поля двух параллельных проводников с токами (см. рис. 5.5) дает наглядное представление о том, почему проводники с направлением токов в одну сторону притягиваются (силы взаимодействия проводников F_{12} и F_{21} направлены навстречу друг другу), а с противоположным направлением токов — отталкиваются (силы взаимодействия проводников F_{12} и F_{21} направлены в противоположные стороны). В первом случае (см. рис. 5.5, *а*) магнитные линии от каждого из проводников в пространстве между проводниками направлены в разные стороны. При этом векторы индукции вычитаются. Таким образом, интенсивность поля между проводниками меньше, чем снаружи проводников, и проводники стремятся перемещаться в сторону меньшего сопротивления. Во втором случае (см. рис. 5.5, *б*) в пространстве между проводниками магнитные линии направлены в одну сторону, векторы индукции складываются, интенсивность поля больше, чем снаружи проводников, — проводники отталкиваются.

Линии магнитной индукции для проводников любых конфигураций всегда замкнуты, что наглядно показано для всех рассмотренных примеров (см. рис. 5.3... 5.5).

Густотой линий магнитной индукции можно характеризовать величину магнитной индукции.

Для этого через каждую единичную площадку (1 м^2 , 1 см^2 или 1 мм^2), перпендикулярную к направлению линий магнитной индукции, проводится такое число линий, которое равно или пропорционально магнитной индукции в этой области поля. В связи с этим, например, на рис. 5.3, *а* и 5.5 вблизи проводников магнитные линии расположены гуще, чем на периферии.

Постоянный электрический ток создает постоянное магнитное поле, и его интенсивность, характеризуемая индукцией (см. формулу (5.3)), не зависит от времени. Такое поле называется *стационарным* (постоянным).

Магнитное поле, в различных точках которого векторы магнитной индукции имеют одинаковую величину и параллельны друг другу, называется *однородным*; в противном случае магнитное поле называется *неоднородным*. Примером однородного магнитного поля является магнитное поле внутри длинной цилиндрической катушки с постоянным током (см. рис. 5.4, *а*). Магнитное поле провода с током (см. рис. 5.3, *а*) неоднородно, так как вектор индукции имеет в различных точках поля неодинаковые значения и направления. Примерами неоднородных магнитных полей являются также поля, представленные на рис. 5.3, *б*, 5.4, *в* и 5.5.

Магнитный поток. Одной из характеристик магнитного поля, имеющей в электротехнике большое значение, является *магнит-*

ный поток, или *поток вектора магнитной индукции* (обозначается Φ). Понятие о магнитном потоке применяют при рассмотрении принципов работы и расчетах электромагнитных устройств: электрических машин, трансформаторов, электромагнитов различного назначения и т. п.

Магнитным потоком Φ через площадку S в однородном магнитном поле называют величину, равную проекции вектора магнитной индукции на нормаль \mathbf{n} к площадке, умноженной на величину площадки (рис. 5.6). Таким образом,

$$\Phi = B_n S = BS \cos \beta. \quad (5.9)$$

Поток через площадку S , перпендикулярную направлению поля, т. е. когда вектор магнитной индукции образует с нормалью \mathbf{n} к площадке угол $\beta = 0$,

$$\Phi = BS. \quad (5.10)$$

Из формулы (5.10) определим единицу измерения магнитного потока:

$$[\Phi] = [BS] = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \text{м}^2 = \text{В} \cdot \text{с} = \text{Вб}.$$

В Международной системе единиц магнитный поток измеряется в *вольт-секундах*, $\text{В} \cdot \text{с}$, или *веберах*, Вб.

Более мелкой единицей измерения магнитного потока является *максвелл*, Мкс:

$$1 \text{ Мкс} = 1 \cdot 10^{-8} \text{ Вб}.$$

Для вычисления магнитного потока в общем случае в неоднородном магнитном поле через произвольную поверхность S следует мысленно разделить поверхность на такие бесконечно малые плоские элементы площадью dS , в пределах каждого из которых магнитную индукцию можно считать одинаковой.

Тогда элементарный поток $d\Phi$ через отдельную элементарную площадку dS в соответствии с формулой (5.9) можно выразить как

$$d\Phi = B_n dS.$$

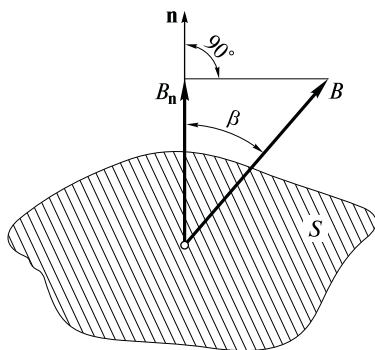


Рис. 5.6. Проекция вектора магнитной индукции на нормаль

Магнитный поток Φ через всю рассматриваемую поверхность S определяется как сумма (интеграл) элементарных потоков:

$$\Phi = \int d\Phi = \int B_n dS. \quad (5.11)$$

Напряженность магнитного поля. Эта характеристика магнитного поля учитывает только собственные свойства проводящего объекта (значение тока, конфигурацию, геометрические размеры) и расстояние до него, исключая влияние среды, в которой находится объект.

В однородной среде *напряженность магнитного поля* (обозначается H) связана с индукцией B следующим соотношением:

$$H = \frac{B}{\mu_a}, \quad (5.12)$$

где μ_a — абсолютная магнитная проницаемость среды (см. формулу (5.8)).

Единицей измерения напряженности магнитного поля в Международной системе единиц является А/м (ампер, деленный на метр):

$$[H] = \left[\frac{B}{\mu_a} \right] = \frac{\text{Тл}}{\text{Гн/м}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{Ом} \cdot \text{с}} = \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

В электротехнике используется также более крупная единица измерения — *эрстед*, Э:

$$1 \text{ Э} = 79,6 \text{ А/м} \approx 80 \text{ А/м}.$$

Напряженность магнитного поля — величина векторная. Направление вектора напряженности магнитного поля в однородной среде (с одинаковыми магнитными свойствами во всех направлениях) совпадает с направлением магнитной индукции в данной точке.

Зависимость напряженности H магнитного поля от свойств проводящего объекта и расстояния до него можно получить исходя из формулы (5.12) и закона Био—Савара (5.3):

$$dH = \frac{Idl \sin \alpha}{4\pi r^2}. \quad (5.13)$$

Магнитное напряжение. Подобно электрическому напряжению для электрических полей при расчете магнитных полей применяется понятие *магнитного напряжения* (обозначение U_m) между двумя точками поля.

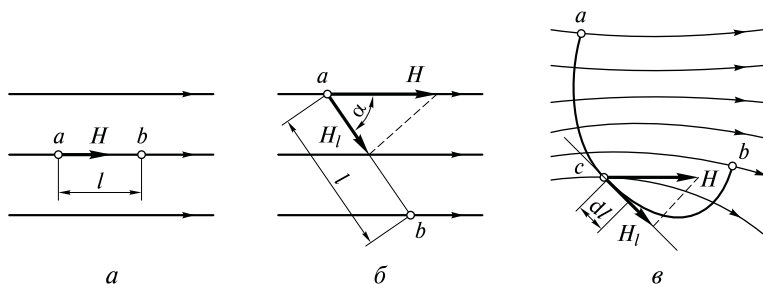


Рис. 5.7. Магнитное напряжение между двумя точками (a , θ) поля: однородное поле (a — точки расположены на одной магнитной линии; b — точки расположены на разных магнитных линиях); неоднородное поле (θ)

Магнитное напряжение U_M между двумя точками одной магнитной линии в случае, когда напряженность H магнитного поля одинакова во всех точках данной магнитной линии и направлена вдоль нее, как, например, в однородном магнитном поле (рис. 5.7, a), равно произведению напряженности магнитного поля и участка длины магнитной линии:

$$U_M = Hl. \quad (5.14)$$

Магнитное напряжение U_M между любыми двумя точками однородного поля, расположенными не на одной и той же магнитной линии (рис. 5.7, b),

$$U_M = H_l l, \quad (5.15)$$

где H_l — проекция вектора напряженности на отрезок l , $H_l = H \cos \alpha$.

Магнитное напряжение в общем случае, когда в различных точках магнитного поля напряженность H неодинакова (рис. 5.7, θ), зависит от выбранного пути между начальной a и конечной b точками. Этот путь мысленно разбивается на n участков длиной dl , и магнитное напряжение вдоль выбранного пути длиной l определяется как сумма (интеграл) элементарных магнитных напряжений:

$$U_M = \int_l H_l dl, \quad (5.16)$$

где H_l — проекция вектора напряженности n -го участка пути на отрезок dl участка.

Часто в расчетах приходится определять магнитное напряжение по замкнутому контуру, произвольно проведенному в магнитном поле.

Магнитное напряжение, вычисляемое по замкнутому контуру, называется *намагничивающей*, или *магнитодвижущей*, силой

(МДС) и обозначается буквой F . Это название отражает свойство тока возбуждать магнитное поле. Таким образом,

$$F = \oint H_l dl, \quad (5.17)$$

где знак \oint обозначает суммирование (интегрирование) по замкнутому контуру элементарных магнитных напряжений $H_l dl$.

При вычислении намагничивающей силы вдоль замкнутого контура необходимо учитывать знак МДС: *магнитное напряжение $H_l dl$ положительно, если направление вектора H_l совпадает с направлением обхода контура, и отрицательно, если направление вектора H_l противоположно направлению обхода контура.*

Связь между намагничивающей силой и токами, создающими магнитное поле, будет рассмотрена далее.

Единицей измерения магнитного напряжения U_M является *ампер*, А:

$$[U_M] = [Hl] = \frac{\text{А}}{\text{м}} \text{м} = \text{А}.$$

5.2. Расчет магнитных полей с помощью закона полного тока

Закон полного тока. В разд. 5.1 был представлен закон Био—Савара для индукции B (см. формулу (5.3)) и напряженности H (см. формулу (5.13)), отражающий зависимость между индукцией (напряженностью) магнитного поля и током, создающим это поле. В общем случае, когда магнитное поле в какой-либо точке пространства создается любым числом токов (одним или несколькими), зависимость между напряженностью магнитного поля и токами, создающими это поле, значительно проще устанавливается с помощью закона полного тока.

Прежде, чем сформулировать закон, внесем ясность в само понятие *полного тока*.

Полным током называется алгебраическая сумма токов ($\sum^{\text{алг}} I$), пронизывающих поверхность, ограниченную замкнутым контуром.

Например, поверхность контура, изображенного на рис. 5.8, a , пронизывают два тока I_1 и I_2 , направленные в разные стороны.

Для определения знака тока при вычислении алгебраической суммы токов произвольно выберем направление обхода контура, например по направлению движения часовой стрелки. Будем считать ток, пронизывающий поверхность контура, положительным, если его направление совпадает с поступательным движением

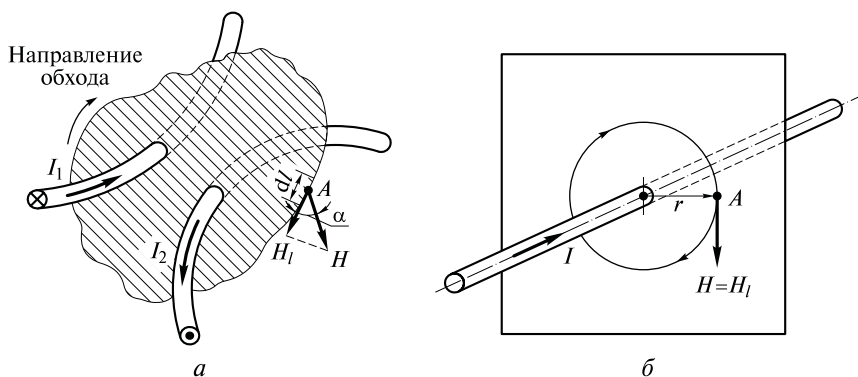


Рис. 5.8. Вычисление напряженности магнитного поля по полному току: *а* — полный ток сквозь поверхность замкнутого контура; *б* — напряженность снаружи прямолинейного провода с током

буравчика, рукоятка которого вращается в выбранном направлении обхода контура, и отрицательным, если не совпадает.

Таким образом, ток I_1 на рис. 5.8, *а* положительный, а ток I_2 — отрицательный. Полный ток в этом случае:

$$\sum_{\text{алг}} I = I_1 - I_2.$$

Опытным путем установлено, что *магнитодвижущая сила вдоль контура, произвольно проведенного в магнитном поле, равна полному току (алгебраической сумме токов), проходящему сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.*

Эта зависимость получила название *закона полного тока.*

Таким образом, в соответствии с законом полного тока

$$F = \sum_{\text{алг}} I, \quad (5.18)$$

где F — намагничивающая сила.

В соответствии с формулой (5.17) МДС определяется как магнитное напряжение, вычисленное по проведенному в магнитном поле замкнутому контуру:

$$F = \oint H_i dl.$$

Другими словами, напряженность магнитного поля и токи, его создающие, связаны между собой законом:

$$\oint H_i dl = \sum_{\text{алг}} I. \quad (5.19)$$

В некоторых случаях целесообразно контур (который мы вправе проводить в магнитном поле произвольно) совместить с магнитной линией.

Рассмотрим примеры применения закона полного тока для расчета напряженностей магнитных полей в ряде конкретных случаев.

Магнитное поле прямолинейного провода с током. Магнитное поле снаружи провода и внутри него имеет разный характер изменения.

Магнитное поле снаружи прямолинейного провода с током. Определим на основании закона полного тока напряженность магнитного поля прямолинейного провода с током I (рис. 5.8, б) в произвольной точке A , отстоящей от оси провода на расстоянии $r \geq a$ (a — радиус провода).

Для этого в плоскости, перпендикулярной оси провода, через точку A проведем вокруг провода магнитную силовую линию, которая представляет собой окружность и является замкнутым контуром.

В соответствии с выражением (5.13) во всех точках, удаленных от оси провода на одинаковое расстояние, напряженность поля в силу симметрии одинакова по величине. Так как контур является окружностью, то вектор напряженности H и его проекция на касательную к контуру H_t в любой точке контура совпадают и равны между собой: $H = H_t$.

Магнитодвижущая сила F положительна, так как направление вектора напряженности H_t совпадает с направлением обхода контура.

В соответствии с формулой (5.17) и с учетом того, что $H_t = H = \text{const}$, магнитодвижущая сила

$$F = \oint H_t dl = H \oint dl.$$

Сумма всех dl замкнутого контура — ни что иное, как длина окружности магнитной силовой линии радиусом r : $\oint dl = 2\pi r$.

Тогда магнитодвижущая сила

$$F = H2\pi r.$$

Полный ток в рассматриваемом случае равен току I в проводе:

$$\sum_{\text{алг}} I = I.$$

Так как по закону полного тока (см. формулу (5.18)) магнитодвижущая сила равна полному току, то получим:

$$H2\pi r = I, \text{ или } H = \frac{I}{2\pi r}. \quad (5.20)$$

Эта формула позволяет получить приемлемый результат при значениях $r \ll l$.

Напряженность поля на поверхности провода ($r = a$) максимальна:

$$H = H_{\max} = \frac{I}{2\pi a}.$$

Магнитное поле внутри прямолинейного провода с током. Определим напряженность магнитного поля внутри прямолинейного провода с током I , сечение которого изображено на рис. 5.9, а, в произвольной точке A , отстоящей от оси провода на расстоянии $r \leq a$ (a — радиус провода).

Для определения напряженности поля внутри провода также можно воспользоваться законом полного тока. Для этого через точку A , удаленную от оси провода на расстояние $r \leq a$, проведем замкнутый контур в виде окружности радиуса r с центром на оси провода.

Полный ток внутри замкнутого контура можно определить как произведение плотности тока J внутри провода на площадь внутри замкнутого контура $S' = \pi r^2$.

Если считать плотность тока одинаковой по всему поперечному сечению провода, то получим:

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi a^2}; \quad \sum I = JS' = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 = I \frac{r^2}{a^2}.$$

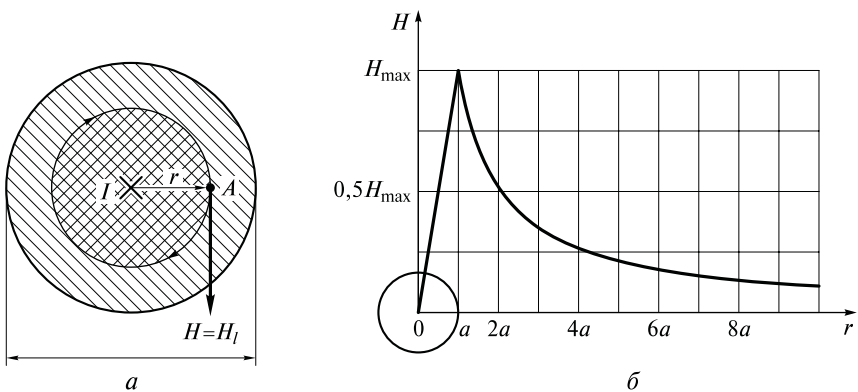


Рис. 5.9. Напряженность магнитного поля внутри прямолинейного провода с током (а) и график изменения напряженности магнитного поля прямолинейного провода с током (б)

Аналогично предыдущему случаю магнитодвижущая сила

$$F = H2\pi r.$$

Так как по закону полного тока (см. формулу (5.18)) магнитодвижущая сила равна полному току, то

$$H2\pi r = \sum_{\text{алг}} I.$$

Откуда

$$H = \frac{\sum_{\text{алг}} I}{2\pi r} = I \frac{r^2}{a^2 2\pi r} = \frac{I}{2\pi a^2} r, \quad (5.21)$$

т.е. напряженность поля в произвольной точке внутри провода пропорциональна расстоянию r этой точки от оси провода.

Следовательно, в центре провода (при $r = 0$) напряженность $H = 0$, а на поверхности провода ($r = a$) напряженность максимальна:

$$H = H_{\text{max}} = \frac{I}{2\pi a^2} a = \frac{I}{2\pi a}.$$

На рис. 5.9, б изображен график изменения напряженности поля внутри и снаружи прямолинейного провода с током.

Магнитное поле кольцевой катушки. Определим напряженность магнитного поля катушки с кольцевым магнитопроводом (сердечником), на который с равномерной плотностью намотана обмотка из w витков, по которым протекает ток I (рис. 5.10, а).

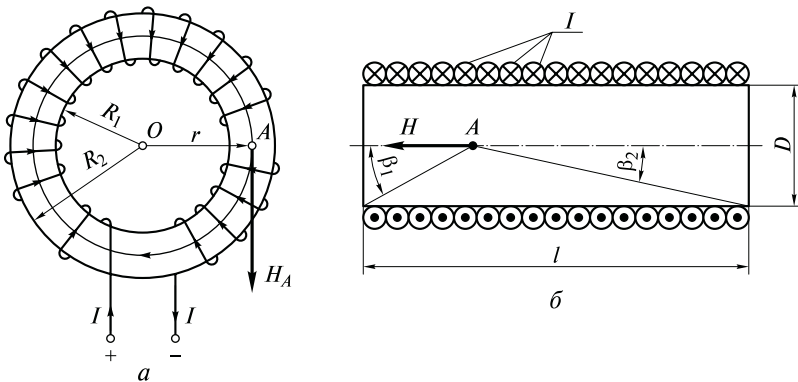


Рис. 5.10. Катушки с токами:
а — кольцевая; б — цилиндрическая

Для определения напряженности поля катушки воспользуемся законом полного тока (см. формулу (5.18)), в соответствии с которым для любой точки, расположенной на расстоянии $r \geq 0$ от центра катушки (точка O), намагничивающая сила должна быть равна полному току.

Разделим расстояние r на интервалы:

1) $R_1 \leq r \leq R_2$ (R_1 и R_2 — внутренний и наружный радиусы сердечника соответственно). Проведем через выбранную точку указанного интервала (например, через точку A на рис. 5.10, a) замкнутый контур, совпадающий с магнитной линией — окружностью радиуса r . В силу симметрии напряженность магнитного поля H во всех точках, удаленных от оси кольца на расстояние r) будет одинакова. При этом магнитодвижущая сила

$$F = Hl = H2\pi r,$$

где l — длина магнитной силовой линии, в данном случае — окружности радиусом r .

Полный ток $\sum_{\text{алг}} I = Iw$, так как поверхность, ограниченную рассматриваемым контуром, пронизывает w проводников с токами I одинакового направления и величины.

В практике произведение Iw принято называть *ампер-витками*. Так как по закону полного тока (5.18) магнитодвижущая сила F равна полному току (в данном случае Iw), то ампер-витки катушки называются еще *намагничивающей силой катушки*.

В соответствии с законом полного тока запишем

$$F = H2\pi r = Iw. \quad (5.22)$$

Из формулы (5.22) определим напряженность поля

$$H = \frac{F}{2\pi r} = \frac{Iw}{2\pi r}. \quad (5.23)$$

Таким образом, напряженность магнитного поля внутри кольцевой катушки в точке, находящейся на расстоянии r от центра катушки, численно равна намагничивающей силе (ампер-виткам), приходящейся на единицу длины магнитной силовой линии — окружности радиуса r .

Напряженность катушки известных геометрических размеров определяется ее ампер-витками. Таким образом, магнитное поле кольцевой катушки заданной интенсивности можно получить двумя способами: при относительно малом токе, но относительно большом числе витков или при большом токе, но относительно малом числе витков.

Согласно формуле (5.23) напряженность поля внутри кольцевой катушки на внутренней поверхности кольца ($r = R_1$) имеет максимальное значение:

$$H_{\max} = \frac{Iw}{2\pi R_1}.$$

Минимальное значение напряженности имеет на внешней поверхности кольца ($r = R_2$):

$$H_{\min} = \frac{Iw}{2\pi R_2}.$$

Между значениями H_{\max} и H_{\min} напряженность уменьшается обратно пропорционально увеличению r . На средней линии кольца при $r = (R_1 + R_2)/2$ напряженность

$$H_{\text{cp}} = \frac{Iw}{\pi(R_1 + R_2)};$$

2) $r < R_1$. В этом случае поверхность, ограниченную окружностью радиуса r , не пронизывают витки с токами, следовательно, алгебраическая сумма токов равна нулю. При этом согласно формуле (5.23) напряженность H магнитного поля также равна нулю: $H = 0$;

3) $r > R_2$. В этом случае витки с токами I два раза пронизывают поверхность, ограниченную рассматриваемым контуром, в противоположных направлениях. Таким образом, алгебраическая сумма токов, пронизывающих контур, $\sum_{\text{алг}} I = Iw - Iw = 0$. При этом напряженность магнитного поля согласно формуле (5.23) также имеет нулевое значение: $H = 0$.

Магнитное поле цилиндрической катушки. Определим напряженность магнитного поля цилиндрической катушки с обмоткой из w витков, намотанной вплотную друг к другу на длине l , по которой протекает ток I (рис. 5.10, б).

Для определения напряженности магнитного поля можно рассмотреть цилиндрическую катушку как часть кольцевой катушки бесконечно большого радиуса, у которой на части сердечника длиной l расположена обмотка из w витков, по которой протекает ток I .

Так как магнитные линии цилиндрической катушки параллельны ее оси, то длину катушки l можно представить как часть магнитной линии кольцевой катушки с намагничивающей силой, равной Iw .

Тогда в соответствии с формулой (5.23) напряженность магнитного поля внутри цилиндрической катушки можно выразить как намагничивающую силу (ампер-витки), приходящуюся на единицу длины магнитной линии.

Таким образом, напряженность поля во всех точках внутри цилиндрической катушки (на любой линии, параллельной оси катушки) одинакова и может быть определена по формуле

$$H = \frac{Iw}{l}. \quad (5.24)$$

Формула (5.24) является лишь приближенной. Магнитное поле цилиндрической катушки имеет конфигурацию (см. рис. 5.4, *a*), отличную от кольцевой катушки (см. рис. 5.4, *в*). Внутри цилиндрической катушки напряженность магнитного поля и магнитная индукция направлены вдоль оси катушки. В отличие от кольцевой катушки магнитные линии цилиндрической катушки замыкаются снаружи нее, и вблизи катушки напряженность поля не равна нулю.

Большую ошибку мы получим, если по формуле (5.24) определим напряженность поля или магнитную индукцию у краев катушки. Чем длиннее катушка, тем меньше ошибка.

Применяется более точная формула для определения напряженности в какой-либо точке *A* на оси катушки конечной длины (см. рис. 5.10, *б*):

$$H = \frac{Iw}{2l} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2). \quad (5.25)$$

Формулами (5.24) и (5.25) можно пользоваться только для катушек без сердечника или с сердечником из неферромагнитного материала.

Во всех рассмотренных примерах по значению напряженности *H* можно определить значение индукции *B*, пользуясь соотношением (5.12):

$$B = \mu_a H = \mu \mu_0 H.$$

5.3. Магнитные свойства вещества

Магнетизм веществ. Еще со времен, когда изучение магнитных явлений только начиналось, было известно, что магнитное поле воздействует на всякое вещество — приводит его в особое состояние намагниченности, а вещество, в свою очередь, определенным образом изменяет воздействующее магнитное поле. Внимание исследователей особенно привлек к себе факт существования в намагниченных брусках железа (магнитах) двух различных полюсов (северного и южного). Каждый полюс одного магнита притягивает к себе один из полюсов другого и отталкивает второй его полюс.

Ш. О. Кулон, занимающийся исследованием взаимодействия магнитов, показал, что закон взаимодействия магнитных полюсов аналогичен закону взаимодействия электрических зарядов. А именно: *два одноименных полюса отталкиваются друг от друга, а два разноименных полюса притягиваются друг к другу с силой, которая прямо пропорциональна «количествам магнетизма», сосредоточенным в этих полюсах, и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.*

Однако сам Ш. О. Кулон обратил внимание и на существенное и глубокое различие между электрическими и магнитными явлениями: можно разделить электрические заряды и получить часть вещества (тело) с избытком положительного или отрицательного электричества, но невозможно разделить северный и южный полюсы и получить магнит только с каким-либо одним полюсом. Более того, невозможно получить магнит, содержащий в избытке северный или южный магнетизм: оба полюса любого магнита имеют равные по величине количества магнетизма. Разделив на части намагнитившийся стальной брусок, легко убедиться в том, что каждая из полученных частей (любой маленький обломок) представляет собой магнит с двумя полюсами.

Из этого факта (невозможности разделить северный и южный магнетизм) Ш. О. Кулон сделал вывод, что *эти два вида магнитных зарядов неразрывно связаны друг с другом в каждой элементарной частице намагничивающегося вещества: атоме, молекуле или небольшой группе атомов или молекул.* Таким образом, Ш. О. Кулон высказал гипотезу о существовании в веществе элементарных магнитов с неразрывно связанными полюсами.

Намагничивание веществ. С точки зрения гипотезы Кулона процесс намагничивания вещества заключается в следующем. В ненамагниченном теле *уже* существуют описанные ранее элементарные магниты (магнитики), но все они расположены беспорядочно, хаотически. Магнитики без какого бы то ни было порядка располагаются по всем возможным направлениям, причем в каждом направлении примерно столько же магнитиков ориентировано своим северным полюсом, сколько и южным (рис. 5.11, *а*). Именно поэтому действия всех этих элементарных магнитов взаимно уравниваются, и тело в целом оказывается ненамагниченным. Если поместить тело в магнитное поле (например, поднести его к магниту или поместить внутрь катушки с электрическим током), то магнитное поле воздействует на элементарные магниты и заставляет их повернуться и расположиться цепочками, как показано на рис. 5.11, *б*. При этом действие противоположных полюсов внутри магнита взаимно компенсируется, а на концах тела возникают противоположные магнитные полюсы.

Таким образом, *намагничивание тела представляет собою упорядочение расположения его элементарных магнитов под воздействием*

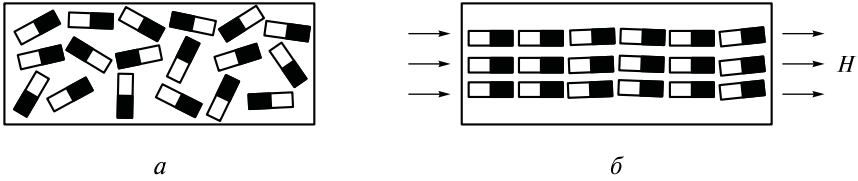


Рис. 5.11. Магнитное поле тела с точки зрения элементарных магнитов: *а* — хаотическое распределение элементарных магнитов в немагнитном теле; *б* — упорядоченное расположение элементарных магнитов в теле, помещенном во внешнее магнитное поле

внешнего магнитного поля. Этот процесс во многом аналогичен процессу поляризации диэлектриков (см. подразд. 1.4).

Природу элементарных магнитов помогли установить открытия Х. К. Эрстеда и А. М. Ампера. А. М. Ампером была высказана гипотеза об элементарных электрических токах: *элементарный магнит — это ни что иное, как круговой ток, циркулирующий внутри небольшой частицы вещества: атома, молекулы или группы их**.

В подразд. 5.1 было показано, что круговой ток по своим магнитным свойствам подобен короткому магниту, ось которого перпендикулярна плоскости тока. В немагнитном теле все элементарные токи расположены хаотически, и поэтому во внешнем пространстве не наблюдается никакого магнитного поля. При намагничивании большая или меньшая часть таких токов устанавливается параллельно друг другу и создает собственное результирующее магнитное поле тела, которое накладывается на внешнее магнитное поле. В итоге вокруг тела наблюдается усиление или ослабление внешнего поля в зависимости от структуры вещества тела.

Магнитный момент. Магнитные свойства элементарного кругового тока принято характеризовать *магнитным моментом* p_m . Значение магнитного момента определяется произведением значений элементарного кругового тока i и площади описанного им круга S :

* Гипотеза А. М. Ампера о существовании элементарных токов, непрерывно циркулирующих внутри частиц вещества, при дальнейшем развитии науки стала следствием созданной в XX в. теории атома. Атом представляет собой систему из центрального положительно заряженного тела — так называемого ядра атома — и электронов, обращающихся около него, подобно тому, как планеты обращаются вокруг Солнца. Помимо обращения вокруг ядра, электронам (подобно планетам) приписывается и вращение вокруг собственной оси (аналогия с годичным и суточным движением планет). Круговые движения зарядов представляют собою круговые токи, циркулирующие внутри атомов. Удалось даже осуществить специальные опыты, показывающие, что намагничивание тел сопровождается ориентировкой осей этих круговых токов, стремящихся расположиться параллельно.

$$p_M = iS. \quad (5.26)$$

Магнитный момент p_M — величина векторная. Его направление определяется по правилу буравчика (рис. 5.12, а).

Магнитный момент тела \bar{P}_M (рис. 5.12, б) — это величина, значение которой определяется как *геометрическая сумма векторов* магнитных моментов \bar{p}_M всех элементарных круговых токов рассматриваемого тела:

$$\bar{P}_M = \sum \bar{p}_M. \quad (5.27)$$

Величина и ориентация магнитного момента \bar{P}_M определяет магнитные свойства вещества, которые характеризуются магнитной проницаемостью вещества μ_a (см. подразд. 5.1).

Причины различия между свойствами парамагнитных и диамагнитных тел. Эти причины обусловлены различием в строении самих атомов или молекул вещества. Попадая в зону действия внешнего магнитного поля, диамагнитные и парамагнитные тела реагируют на него неодинаково.

Каждая частица (атом или молекула) и диамагнитное тело в целом вне магнитного поля не обладают магнитными свойствами. Это объясняется определенным строением частиц диамагнетика. Как было сказано, в атомах всех веществ есть большое число движущихся электронов — элементарных круговых токов. Но до внесения диамагнетика в магнитное поле магнитные моменты \bar{p}_M этих отдельных токов взаимно компенсируют друг друга, так что атом в целом не является элементарным магнитом. При внесении такого вещества в магнитное поле на каждый движущийся электрон (элементарный ток) начинает действовать сила Лоренца (см. подразд. 5.4). Совокупное действие этих сил, как показывает расчет, приводит к появлению определенного тока, в результате чего атом приобретает свойства элементарного магнита. Так как этот

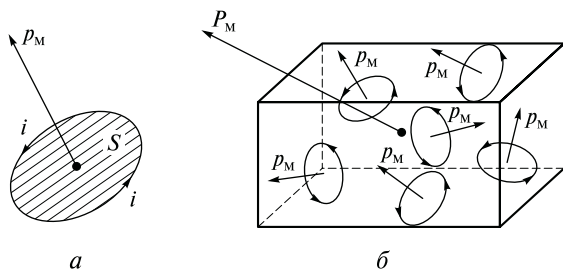


Рис. 5.12. Магнитный момент:

а — элементарного тока; б — суммарный момент элементарных токов ненамагниченного тела

ток является «наведенным» (индуцированным), то согласно правилу Ленца (см. подразд. 7.1) он создает магнитный поток, направленный навстречу потоку внешнего магнитного поля, вызвавшему его возникновение. Этим и объясняется ослабление диамагнетиком внешнего магнитного поля. Возникновение такого магнитного поля объясняет факт отталкивания диамагнетика магнитным полем.

В атомах *парамагнитных веществ* магнитные моменты \bar{p}_m отдельных элементарных токов, образованных движением электронов по своим орбитам, не полностью компенсируют друг друга, так что атом в целом сам по себе является элементарным магнитом. Пока поле не действует, все элементарные магниты расположены беспорядочно, хаотично и вещество в целом является ненамагниченным. Действие внешнего магнитного поля упорядочивает расположение элементарных магнитов — ориентирует их в направлении внешнего магнитного поля. Поэтому суммарное поле от элементарных магнитов усиливает внешнее магнитное поле. *Выстраивание элементарных магнитов более или менее параллельными цепочками в направлении внешнего поля объясняет факт притяжения парамагнетика к магниту.*

Ослабление и усиление внешнего магнитного поля диамагнетиками и парамагнетиками незначительно. Оно составляет сотые доли процента.

Особенности магнетизма ферромагнитных материалов. Кроме представленных ранее, имеются вещества, собственное магнитное поле которых превышает магнитные поля в пустоте (воздухе) в тысячи и десятки тысяч раз. К таким веществам относятся железо, сталь, чугун, никель, кобальт и их сплавы (алюминий с никелем и др.). Впервые свойства сильной концентрации магнитного поля были обнаружены у железа и его сплавов. Поэтому такие вещества получили название *ферромагнитных материалов (ферромагнетиков)*.

Магнетизм ферромагнетика (как и всех других веществ) определяют элементарные электрические токи, обусловленные движением электронов по своим орбитам, которые создают магнитные моменты, называемые *орбитальными моментами*, и магнитные моменты, обусловленные вращением электронов вокруг собственной оси, так называемые *спиновые моменты (спины)*.

Однако магнетизм ферромагнетиков имеет свои особенности. Установлено, что главную роль в их магнетизме играют спиновые моменты. В ферромагнетиках образуются такие кристаллические структуры (отдельные области), в пределах которых спиновые моменты ориентируются параллельно. Эти области оказываются самопроизвольно (спонтанно) намагниченными. Они называются *магнитными доменами*. Домены имеют размеры порядка $10^{-2} \dots 10^{-6} \text{ см}^3$.

Пока внешнее поле не действует в веществе тела, все домены расположены беспорядочно, хаотично. Суммарный магнитный момент тела оказывается равным нулю, и тело в целом является немагнитным.

Внесение ферромагнетика во внешнее магнитное поле вызывает поворот доменов и их ориентацию в направлении внешнего поля. В результате ферромагнетик намагничивается. При этом его собственное поле (результатирующее поле его доменов) усиливает внешнее поле в тысячи и десятки тысяч раз.

Описание электротехнических свойств ферромагнетиков и применение их в электротехнике приведено в гл. 6.

5.4. Работа электромагнитных сил

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Опыты показывают, что на проводник с током в магнитном поле действует сила, способная его перемещать. Объяснение этих опытов принадлежит Х.А.Лоренцу*: *силы, с которыми магнитное поле действует на проводник с током, являются силами, действующими на движущиеся заряды (электроны или ионы), которые и составляют ток.* Эти силы называют силами Лоренца (лоренцовыми силами). Они увлекают и сам проводник, в котором движутся заряды (протекает ток), так как движущиеся заряды сталкиваются с атомами вещества и передают на них действие сил. Силы Лоренца являются силами взаимодействия внешнего магнитного поля и тока, поэтому их *результатирующая сила* называется *электромагнитной силой* F (рис. 5.13, а).

Правило левой руки. Направление электромагнитной силы удобно определять по *правилу левой руки: если расположить левую руку так, чтобы вытянутые четыре пальца (кроме большого) показывали направление тока в проводе, а линии магнитной индукции B «входили» в ладонь, то большой палец, отогнутый перпендикулярно к четырем остальным, покажет направление электромагнитной силы F .*

При этом надо помнить, что направление тока совпадает с направлением движения положительных заряженных частиц, т.е. противоположно движению электронов.

Расположение векторов взаимодействующих электромагнитных величин показано на рис. 5.13, б.

Выражение электромагнитной силы. В равномерном магнитном поле с индукцией B на элемент длины dl провода с

* Лоренц Х.А. (1853—1928), голландский физик. Х.А.Лоренцем была высказана мысль (подтвержденная позже опытами В.К.Рентгена и других ученых), что магнитное поле следует рассматривать как поле, создаваемое движущимися зарядами, т.е. током.

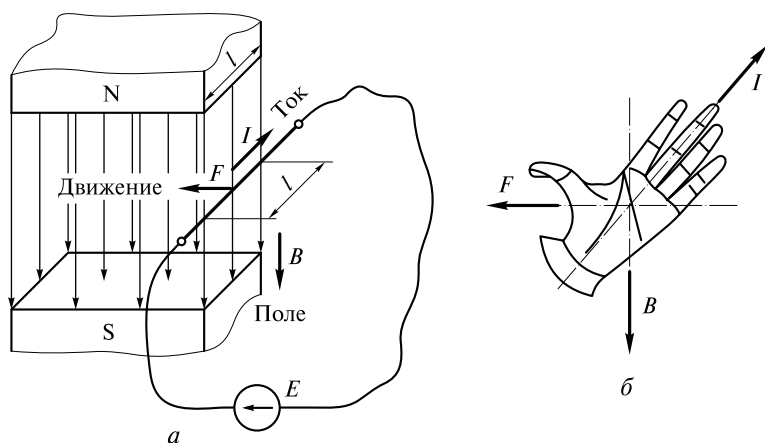


Рис. 5.13. Прямой провод с током в равномерном магнитном поле (а) и правило левой руки (б)

током I в любом месте действует одинаковая электромагнитная сила dF . Электромагнитная сила F , действующая на часть провода (расположенную в пределах магнитного поля) длиной l , может быть определена как

$$\bar{F} = \int d\bar{F}. \quad (5.28)$$

Тогда на основании формул (5.28), (5.1) и (5.3) получим выражение силы:

$$F = BIl \sin \alpha, \quad (5.29)$$

где F — электромагнитная сила, Н; B — магнитная индукция, Тл; I — ток в проводе, А; l — длина части провода, находящейся в магнитном поле, м; α — угол между направлениями векторов магнитной индукции B и тока I , рад.

Таким образом, значение силы F определяется нормальной составляющей $B_n = B \sin \alpha$ вектора индукции B к направлению тока I . Если $\alpha = \pi/2$, то $B_n = B \sin \alpha = B$. При этом сила F максимальна:

$$F = BIl. \quad (5.30)$$

На провод с током, расположенный вдоль линий магнитной индукции ($\alpha = 0$), магнитное поле не действует: $F = 0$.

Работа при перемещении проводника с током в магнитном поле. При перемещении проводника с током I в магнитном поле под углом $\alpha > 0$ к вектору магнитной индукции B электромагнитная сила F совершает механическую работу A .

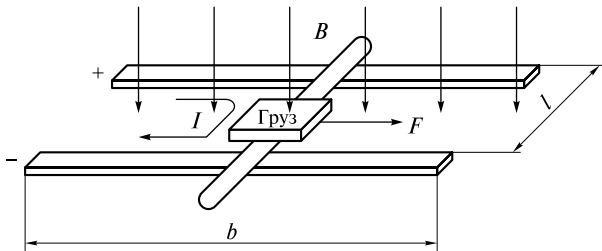


Рис. 5.14. Работа электромагнитной силы

Пусть проводник, находящийся в однородном магнитном поле, имеет возможность перемещаться (например, по рельсам, как показано на рис. 5.14). Под действием силы F он переместился на расстояние b по направлению силы. При этом силами поля была совершена работа A , которую с учетом формулы (5.30) можно представить выражением

$$A = Fb = BIlb. \quad (5.31)$$

Произведение $lb = S$ — площадь поверхности, описанной проводом при его перемещении перпендикулярно направлению поля. Согласно формуле (5.10) произведение $BS = \Phi$ — поток, пронизывающий поверхность S .

Следовательно, работа

$$A = IBS = I\Phi. \quad (5.32)$$

Таким образом, при перемещении провода с постоянным током в однородном магнитном поле электромагнитными силами поля совершается механическая работа, равная произведению тока I и пересеченного проводом магнитного потока Φ .

Действие магнитного поля на виток или соленоид, по которым проходит ток.

Рассмотрим для простоты виток прямоугольной формы — рамку. Пусть рамка с током расположена в однородном магнитном поле так, что две ее стороны параллельны направлению внешнего поля, а две другие — перпендикулярны ему (рис. 5.15, а).

Магнитное поле не действует на близко расположенные (лучше свитые, представляющие собою единое целое) проводящие провода. Причина в том, что токи, протекающие по ним, равны и противоположно направлены. В этом случае электромагнитные силы, действующие на провода, равны и в соответствии с правилом левой руки противоположно направлены, и результирующая сила, действующая на свитые провода, равна нулю.

На горизонтальные стороны рамки поле не действует, так как угол α между направлениями векторов индукции внешнего поля B и тока I равен нулю, и электромагнитные силы, действующие на

каждую из сторон, в соответствии с формулой (5.29) равны нулю. На вертикальные стороны рамки действуют равные согласно формуле (5.30) и в соответствии с правилом левой руки противоположно направленные силы F_1 и F_2 . Они составляют пару сил, которая обуславливает *вращающий момент*, поворачивающий виток таким образом, что плоскость витка устанавливается перпендикулярно направлению поля. Новое положение рамки показано на рис. 5.15, б, причем для наглядности показан вид по стрелке А (см. рис. 5.15, а).

Если поле однородно, перемещение ограничивается поворотом рамки. После поворота (см. рис. 5.15, б) каждая пара сторон рамки (в том числе и две первые стороны, которые после поворота оказываются перпендикулярными направлению поля), начинает испытывать действие противоположно направленных равных сил, которые стремятся деформировать рамку, например растягивать ее, если силы направлены так, как показано на рис. 5.15, б. Электромагнитные силы $F_1 \dots F_4$ компенсируются упругими силами, возникающими при деформации жесткого витка. В положении витка (см. рис. 5.15, б) вращающий момент равен нулю, так как силы F_1 и F_2 направлены по линии, проходящей через ось вращения рамки. Такое положение является устойчивым. Если рамка пройдет его, например, по инерции, то возникает противодействующий момент, который возвращает рамку в устойчивое положение.

В случае соленоида (совокупности последовательно соединенных витков) вращающие моменты действуют на каждый виток соленоида. Складываясь, они создают результирующий

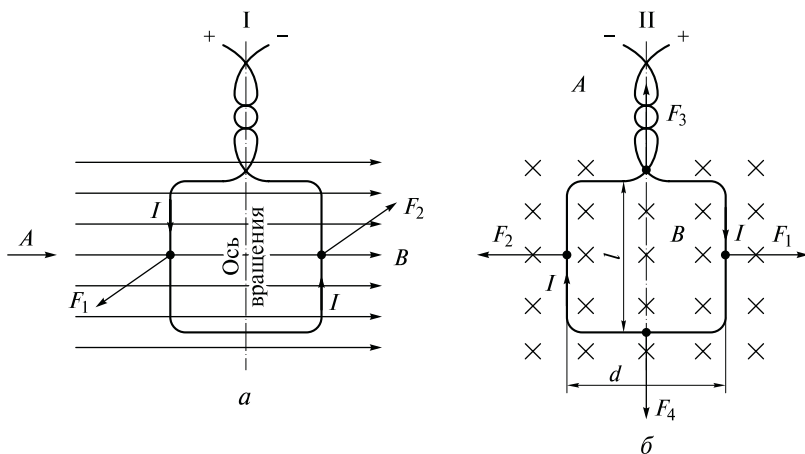


Рис. 5.15. Силы, действующие на рамку с током в магнитном поле: а — пара сил, создающих вращающий момент; б — вид по стрелке А после поворота рамки

вращающий момент, поворачивающий весь соленоид. Движение соленоида прекратится, как только ось его расположится вдоль силовых линий внешнего поля. При этом на стороны каждого витка будут действовать деформирующие его электромагнитные силы.

Работа при перемещении витка с током в магнитном поле. Определим работу A , совершенную при повороте рамки из положения I, (см. рис. 5.15, *a*) в положение II (см. рис. 5.15, *б*).

При повороте рамки каждая из ее вертикальных сторон перемещается в направлении действия силы на расстояние $d/2$, где d — ширина рамки.

Работа по перемещению каждой стороны рамки согласно формуле (5.30):

$$A' = BIl \frac{d}{2}.$$

Тогда работа A по перемещению всей рамки в 2 раза больше, чем одной из двух сторон:

$$A = 2A' BIl d = BIS = \Phi_{\max} I,$$

где S — площадь рамки, $S = ld$; Φ_{\max} — наибольшее значение магнитного потока, пронизывающего рамку (сцепленного с рамкой), $\Phi_{\max} = BS$.

Так как поток в положении I равен $\Phi_I = 0$, а в положении II $\Phi_{II} = \Phi_{\max}$, то приращение потока $\Delta\Phi$, сцепленного с рамкой при повороте ее из положения I в положение II:

$$\Delta\Phi = \Phi_{II} - \Phi_I = \Phi_{\max}.$$

Таким образом, работу можно выразить через приращение потока:

$$A = \Delta\Phi I.$$

При повороте рамки на угол α относительно положения I значение потока Φ изменяется по закону

$$\Phi = \Phi_{\max} \sin\alpha,$$

так как в любом промежуточном положении проекция площади, ограниченной рамкой, на плоскость, перпендикулярную направлению линий магнитной индукции, равна $S \sin\alpha$.

Произведенная работа при этом

$$A = \Phi I. \quad (5.33)$$

При повороте рамки из положения I в любое промежуточное положение (на угол α)

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi_I = \Phi. \quad (5.34)$$

Таким образом, работу в общем случае можно представить как

$$A = \Delta\Phi I. \quad (5.35)$$

Работа электромагнитных сил при перемещении катушки с током в магнитном поле. Потокосцепление. Устройство, представляющее собой рамку из изоляционного материала, на которую намотан не один, а несколько витков w , называется *катушкой*. Если предположить, что все витки сцеплены с одним и тем же потоком, то работа, совершаемая электромагнитными силами при перемещении катушки в магнитном поле, увеличится в w раз по сравнению с работой по перемещению витка:

$$A = w\Delta\Phi I. \quad (5.36)$$

Произведение числа витков катушки и сцепленного с этими витками магнитного потока называется *потокосцеплением*

$$\Psi = w\Phi. \quad (5.37)$$

Тогда согласно формуле (5.36) работа электромагнитных сил по перемещению катушки в магнитном поле выражается произведением приращения магнитного потокосцепления и тока в витках катушки:

$$A = \Delta\Psi I. \quad (5.38)$$

Формула (5.38) справедлива и для общего случая, когда витки катушки пронизываются несколькими, отличными друг от друга по величине или по направлению (или и по величине, и направлению), потоками. В этом случае общее потокосцепление определяется как алгебраическая сумма частных потокосцеплений:

$$\Psi_i = w_i\Phi_i,$$

где i — число разных потоков, сцепленных со своими витками w_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Таким образом, общее потокосцепление:

$$\Psi = \sum_{\text{алг}} (w_i\Phi_i). \quad (5.39)$$

При этом *произведение $w_i\Phi_i$ входит в формулу со знаком «+» (является положительным), если направление потока Φ_i совпадает с направлением потока от тока, протекающего по катушке. В противном случае — со знаком «-».*

Если в уединенном контуре любой формы протекает ток, то магнитное поле этого тока сцеплено с самим контуром. Потокосцепление такого контура называется *собственным*. Собственное потокосцепление характеризует связь тока с собственным магнитным полем.

Потокосцепление имеет ту же размерность, что и магнитный поток:

$$[\Psi] = \text{Мкс} = 1 \cdot 10^{-8} \text{ Вб}.$$

Например, исходя из сказанного собственное потокосцепление цилиндрической катушки (рис. 5.16, а) будет представлено выражением следующего вида:

$$\Psi = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3 + w_4\Phi_4,$$

где $w_1 = 7$, $w_2 = 5$, $w_3 = 3$ и $w_4 = 1$.

5.5. Индуктивность. Взаимная индуктивность

Индуктивность. Понятие индуктивности введено для описания электромагнитных свойств уединенных контуров (например, катушек) с токами.

Ток, протекающий по замкнутому контуру, создает собственное магнитное поле, силовые линии которого, замыкаясь, пронизывают поверхность, ограниченную контуром. Это поле характеризуется собственным потоком, а контур — собственным потокосцеплением.

Собственное потокосцепление зависит от тока в контуре — при изменении тока в контуре изменяется его собственное потокосцепление.

Связь между собственным потокосцеплением и током в контуре характеризуется коэффициентом связи, который называется *индуктивностью контура* и обозначается буквой L . Таким образом, индуктивность уединенного контура

$$L = \frac{\Psi}{I}. \quad (5.40)$$

Значение индуктивности определяется свойствами самого контура: его формой, геометрическими размерами и параметрами среды, в которой создается его магнитное поле.

Для каждого конкретного контура (с неизменной формой, геометрическими размерами и окружающей его средой) в *линейных средах* (вакууме и неферромагнитных веществах) *индуктивность является величиной постоянной*, так как магнитная проницаемость линейных сред не зависит от значения тока и связанных с ним магнитных величин (см. подразд. 5.1). В *нелинейных средах* (к которым относятся ферромагнитные материалы) индуктивность не является постоянной величиной, так как магнитная проницаемость таких сред зависит от величины тока и имеет нелинейный характер (см. подразд. 6.1).

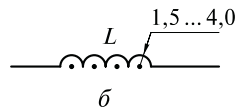
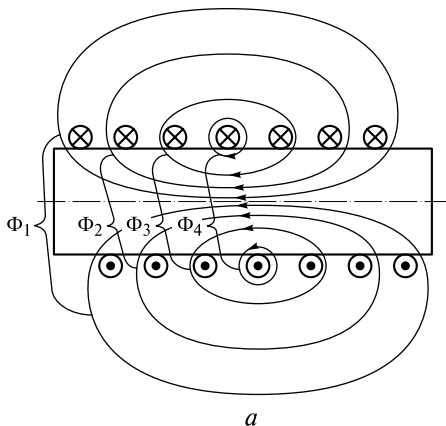


Рис. 5.16. Потокосцепление цилиндрической катушки (а) и условно-графическое обозначение индуктивности (б)

Условно-графическое обозначение индуктивности любого контура в схемах электрических цепей показано на рис. 5.16, б.

Единица индуктивности:

$$[L] = \left[\frac{\Psi}{I} \right] = \frac{\text{Вб}}{\text{А}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} = \text{Ом} \cdot \text{с} = \text{Гн (генри)}.$$

Единица индуктивности (Ом · с) имеет название генри*. На практике индуктивность часто выражается в долях генри: миллигенри, мГн, и микрогенри, мкГн:

$$1 \text{ Гн} = 1 \cdot 10^3 \text{ мГн} = 1 \cdot 10^6 \text{ мкГн}.$$

Расчетные формулы для вычисления индуктивности. Индуктивность является основной характеристикой проводящих контуров, катушек индуктивности — наиболее распространенных элементов электротехнических устройств. Так как значение индуктивности зависит от конструктивных параметров конкретных элементов, то для различных случаев можно вывести формулы для ее расчета, что очень важно при проектировании устройств. Рассмотрим примеры вывода формул для вычисления индуктивности в некоторых случаях.

Индуктивность кольцевой катушки (см. рис. 5.10, а). При среднем радиусе кольцевой катушки, значительно большем радиуса витков катушки, среднее значение магнитной индукции в поперечном сечении магнитопровода можно считать равным значению магнитной индукции на средней линии магнитопровода катушки. Тогда магнитный поток катушки Φ с достаточной точностью можно определить согласно формулам (5.10), (5.12) и (5.23):

* Название установлено в честь Генри Дж. (1797—1878), американского физика.

$$\Phi = BS = \mu\mu_0 \frac{Iw}{2\pi r_{\text{cp}}} S, \quad (5.41)$$

где r_{cp} — средний радиус катушки, $r_{\text{cp}} = (R_1 + R_2)/2$; S — площадь поперечного сечения магнитопровода катушки.

Магнитный поток пронизывает все витки катушки, поэтому потокосцепление согласно формуле (5.37):

$$\Psi = w\Phi = \mu\mu_0 \frac{Iw^2}{2\pi r_{\text{cp}}} S. \quad (5.42)$$

Индуктивность кольцевой катушки согласно формулам (5.40) и (5.42):

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu\mu_0 w^2 S}{2\pi r_{\text{cp}}}. \quad (5.43)$$

Магнитопровод кольцевой катушки может иметь разную форму сечения: квадрат, круг и т. п. Если сердечник кольцевой катушки (см. рис. 5.10, а) имеет круглое сечение, катушка называется *торидальной*. В этом случае

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(R_2 - R_1)^2}{4},$$

где D — диаметр поперечного сечения магнитопровода катушки, $D = R_2 - R_1$.

Индуктивность цилиндрической катушки (см. рис. 5.10, б). Если длина катушки l много больше диаметра витков ($l \gg D$), то приближенное значение напряженности внутри катушки можно определить по формуле (5.24). Точность результата расчета тем больше, чем больше отношение l/D .

Тогда приближенное значение индукции B внутри катушки согласно формуле (5.12):

$$B = \mu\mu_0 \frac{Iw}{l}.$$

Согласно формуле (5.40), с учетом формул (5.37) и (5.10) получим выражение для расчета индуктивности цилиндрической катушки:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{w\Phi}{I} = \frac{wBS}{I} = \frac{\mu\mu_0 w^2 S}{l}. \quad (5.44)$$

Выражение (5.44) для индуктивности цилиндрической катушки аналогично выражению (5.43) для индуктивности кольцевой катушки.

На практике применяются катушки различных форм, а для цилиндрических катушек условие $l \gg D$ чаще всего не выполняется. В этих случаях для определения индуктивности применяются расчетные кривые или эмпирические формулы.

Взаимная индуктивность. Если контуры находятся на достаточно близком расстоянии друг от друга, то их потоки (целиком или частично) могут взаимно пронизывать не только свои собственные витки, но и витки соседних контуров. Такие контуры называются *индуктивно связанными*, или *магнитно-связанными*.

Рассмотрим связь контуров на примере катушек.

1. Предположим, что две катушки расположены вблизи друг от друга так, что магнитный поток, созданный током первой катушки, сцеплен с витками обеих катушек, причем рассеяния магнитного потока нет, т.е. все магнитные линии первой катушки сцеплены с витками второй катушки (рис. 5.17, а).

В этом случае имеет место собственное потокосцепление Ψ_{11} с витками w_1 первой катушки и потокосцепление Ψ_{12} потока первой катушки Φ_1 с витками w_2 второй катушки — так называемое *взаимное потокосцепление*.

Собственное потокосцепление первой катушки Ψ_{11} согласно формулам (5.37) и (5.40) может быть представлено в виде

$$\Psi_{11} = w_1 \Phi_1 = L_1 I_1. \quad (5.45)$$

Взаимное потокосцепление, как и собственное, пропорционально току, создающему поток, т.е. I_1 . В рассматриваемом случае

$$\Psi_{12} = w_2 \Phi_1 = M_{12} I_1. \quad (5.46)$$

Коэффициент пропорциональности между взаимным потокосцеплением и током, его создающим, называется *взаимной индуктивностью*. Взаимная индуктивность имеет обозначение M_{ij} , где i — индекс тока, создающего взаимное потокосцепление; j — номер контура, с которым сцеплен взаимный поток. Как и индук-

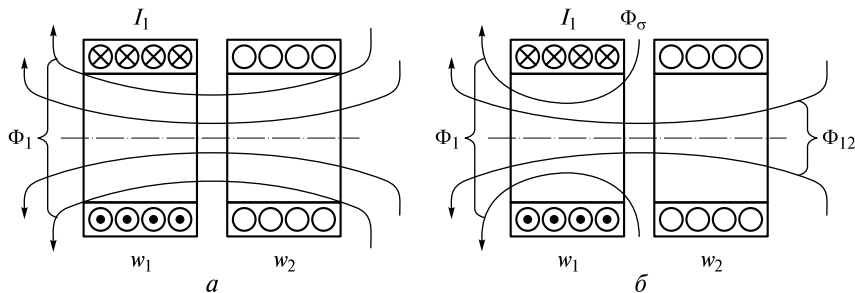


Рис. 5.17. Магнитная связь двух катушек:

$$a - \Phi_{12} = \Phi_1; \quad б - \Phi_{12} < \Phi_1$$

тивность, взаимная индуктивность зависит от конструктивных особенностей конкретной системы контуров и измеряется в генри, Гн.

Из равенств (5.45) и (5.46) можно вывести формулу для расчета взаимной индуктивности в рассматриваемом случае. Разделим равенства одно на другое:

$$\frac{L_1}{M_{12}} = \frac{w_1}{w_2},$$

откуда

$$M_{12} = L_1 \frac{w_2}{w_1}. \quad (5.47)$$

2. Пусть магнитная связь осуществляется потоком второй катушки, созданным током I_2 , при условии, что магнитный поток, созданный током второй катушки, сцеплен с витками обеих катушек. При этом рассеяния магнитного потока нет, т. е. все магнитные линии второй катушки сцеплены с витками первой катушки.

Собственное потокосцепление второй катушки Ψ_{22} может быть представлено в виде

$$\Psi_{22} = w_2 \Phi_2 = L_2 I_2. \quad (5.48)$$

Взаимное потокосцепление

$$\Psi_{21} = w_1 \Phi_2 = M_{21} I_2. \quad (5.49)$$

Разделим уравнение (5.48) на уравнение (5.49):

$$\frac{L_2}{M_{21}} = \frac{w_2}{w_1},$$

откуда

$$M_{21} = L_2 \frac{w_1}{w_2}. \quad (5.50)$$

Из отношений (5.47) и (5.50) следует

$$M_{12} M_{21} = L_1 L_2. \quad (5.51)$$

Докажем, что параметры контуров M_{12} и M_{21} равны между собой. Для этого предположим, что вторая катушка с током I_2 удаляется в бесконечность. При этом потокосцепление второй катушки изменяется на величину взаимного потокосцепления Ψ_{12} ,

т.е. $\Delta\Psi = \Psi_{12}$. Согласно формуле (5.38) работа, совершаемая при удалении второй катушки,

$$A = \Delta\Psi I_2 = \Psi_{12} I_2.$$

В силу относительности движения ту же работу A можно определить как произведение $\Psi_{21} I_1$:

$$\Psi_{12} I_2 = \Psi_{21} I_1.$$

Откуда следует

$$\frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\Psi_{21}}{I_2},$$

или согласно формулам (5.46) и (5.49):

$$M_{12} = M_{21} = M,$$

т.е. *взаимная индуктивность M — это параметр, характеризующий конструктивные особенности всей системы контуров* (в рассматриваемом примере системы, состоящей из двух катушек).

Учитывая тождественность взаимных индуктивностей катушек M_{12} и M_{21} , из соотношения (5.51) получим

$$M = \sqrt{L_1 L_2}. \quad (5.52)$$

Эта формула справедлива при отсутствии рассеяния магнитных потоков, т.е. когда взаимные потоки имеют максимальную величину, т.е. между катушками существует наибольшая магнитная связь.

Потоки рассеяния. В обеих рассмотренных ситуациях мы не учитывали потоков рассеяния. В действительности некоторая часть магнитных силовых линий катушки замыкается только вокруг своих витков: сцеплена только со своими витками (или частью их). Эти линии и определяют *поток рассеяния* Φ_σ . На рис. 5.17, б показан поток рассеяния катушки с током I_1 . Поток рассеяния Φ_σ не образует магнитной связи. При этом магнитная связь катушек оказывается неполной ($\Phi_{12} < \Phi_1$) и взаимная индуктивность $M < \sqrt{L_1 L_2}$.

Для учета влияния потоков рассеяния на величину взаимной индуктивности M в формулу (5.52) введен *коэффициент связи* k :

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}. \quad (5.53)$$

Таким образом, коэффициент связи k магнитно-связанных (индуктивно связанных) контуров

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (5.54)$$

Из формулы (5.54) следует, что коэффициент связи k теоретически может изменяться от 0 до 1, но уменьшить потоки рассеяния до нуля практически невозможно. Поэтому коэффициент связи k в реальных устройствах всегда меньше единицы.

Величина потоков рассеяния зависит от конструктивных особенностей магнитно-связанной системы. При создании реальных устройств (например, трансформаторов), работа которых основана на наличии магнитной связи, предпринимается все возможное для уменьшения потоков рассеяния.

Согласное и встречное включение контуров. В системе магнитно-связанных контуров различают два состояния, которые называют согласным и встречным включением.

Если направления потоков, собственного и взаимного, совпадают внутри индуктивно связанных контуров, имеет место *согласное включение* контуров, в противном случае — *встречное включение* контуров.

Например, на рис. 5.18, *а* представлено согласное включение двух катушек с числом витков w_1 и w_2 . Изменив направление тока в катушке w_2 (поменяв местами подключение выводов катушки к клеммам источника, или направление намотки катушки, с правого на левое, или просто перевернув катушку), мы изменим согласное включение катушек на встречное.

Включение контуров (согласное или встречное) определяющим образом влияет на так называемую *совместную* индуктивность взаимно индуктивно связанных контуров. Совместная индуктивность контуров зависит от параметров связанных контуров собственной индуктивности каждого контура L и их взаимной индуктивности M), а также от характера включения катушек.

Убедимся в этом на примере совместной индуктивности системы последовательно соединенных катушек при согласном $L_{\text{согл}}$ и встречном $L_{\text{встр}}$ их включении.

Последовательное соединение двух взаимно индуктивно связанных катушек. Предположим, что катушки (см. рис. 5.18) соединены последовательно. Тогда $I_1 = I_2 = I$, т. е. и при согласном (см. рис. 5.18, *а*), и при встречном (см. рис. 5.18, *б*) включениях по виткам катушки протекает один и тот же ток I .

Определим *общее потокосцепление системы* для каждого включения: $\Psi_{\text{согл}}$ — при согласном включении, $\Psi_{\text{встр}}$ — при встречном включении.

В соответствии с формулой (5.39) общие потокосцепления:

$$\Psi_{\text{согл}} = \Psi_{11} + \Psi_{22} + \Psi_{12} + \Psi_{21};$$

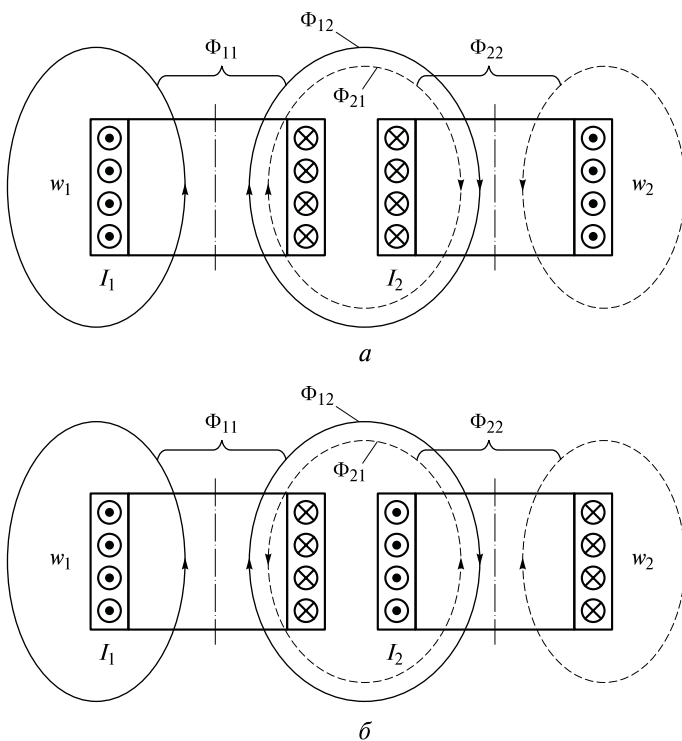


Рис. 5.18. Согласно (а) и встречное (б) включение катушек

$$\Psi_{\text{встр}} = \Psi_{11} + \Psi_{22} - \Psi_{12} - \Psi_{21}.$$

Согласно формуле (5.40) запишем

$$L_{\text{согл}} I = L_1 I + L_2 I + MI + MI;$$

$$L_{\text{встр}} I = L_1 I + L_2 I - MI - MI.$$

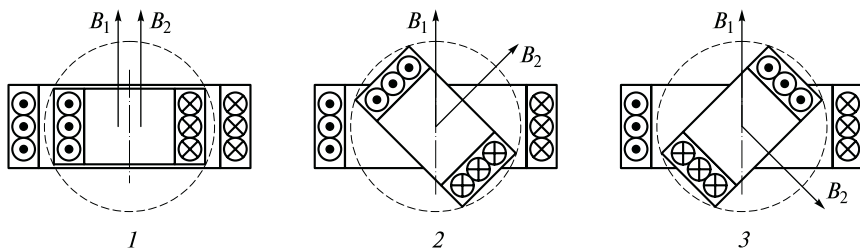


Рис. 5.19. Вариометр:

1, 2, 3 — положения индуктивно связанных катушек

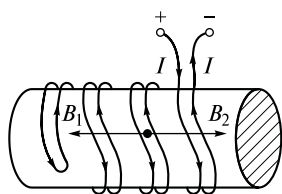


Рис. 5.20. Бифилярная обмотка

Разделив полученные уравнения на ток I , получим:

$$L_{\text{согл}} = L_1 + L_2 + 2M; \quad (5.55)$$

$$L_{\text{встр}} = L_1 + L_2 - 2M. \quad (5.56)$$

Вариометр. Зависимость совместной индуктивности системы индуктивно связанных катушек от направления взаимных потоков внутри них лежит в основе устройства, позволяющего изменять направления взаимных потоков, а следовательно, индуктивность системы катушек. Такое устройство называется *вариометром*. Вариометр обычно представляет собой две катушки, одна из которых имеет возможность поворачиваться (рис. 5.19).

Бифилярная намотка катушек. При необходимости можно выполнить систему катушек, совместная индуктивность которых равна нулю.

Например, если выполнить обмотку катушки двумя рядом расположенными изолированными проводами, концы которых соединены вместе (рис. 5.20), получим встречное включение двух последовательно соединенных катушек с одинаковым числом витков, по которым протекает одинаковый, но противоположно направленный ток. В этом случае равны между собой потокосцепления катушек ($\Psi_{11} = \Psi_{22} = \Psi_{12} = \Psi_{21}$) и индуктивности катушек ($L_1 = L_2 = M$). Тогда общая (совместная) индуктивность катушки

$$L_{\text{встр}} = L_1 + L_2 - 2M = 0.$$

5.6. Энергия магнитного поля

Энергия магнитного поля уединенного контура. Рассмотрим уединенный контур. При подключении его к источнику питания в контуре возникает ток и связанное с контуром магнитное поле. Магнитное поле, как нам известно, обладает энергией. Источником этой энергии является энергия источника питания: часть ее расходуется на преодоление электрического сопротивления контура и превращается в тепло, другая часть запасается в виде энергии магнитного поля.

Изменение энергии магнитного поля ΔW_M равно произведенной работе: $\Delta W_M = A$. Согласно формуле (5.38) $A = \Delta\Psi I$. Отсюда следует, что изменение энергии в магнитной системе связано с изменением потокосцепления.

При этом необходимо принимать во внимание, что в процессе возникновения тока в контуре, сила тока i не остается величиной

постоянной, а увеличивается от 0 до I по мере увеличения скорости заряженных частиц, т.е. $\Delta W_M = A = \Delta \Psi i$. Кроме того, с изменением тока согласно формуле (5.40) изменяется и потокосцепление: $\Psi = Li$ от 0 до Ψ_I .

Так как оба множителя в формуле расчета ΔW_M являются переменными, то целесообразно определить лишь приращение энергии dW_M за некоторый малый промежуток времени, в течение которого ток в контуре можно считать неизменным.

Тогда

$$dW_M = id\Psi, \tag{5.57}$$

где i — некоторое промежуточное значение силы тока между 0 и I , принятое неизменным в течение бесконечно малого промежутка времени; $d\Psi$ — приращение потокосцепления за тот же промежуток времени.

Учитывая формулу (5.40), выражение (5.57) можно представить в виде

$$dW_M = id(Li). \tag{5.58}$$

Индуктивность зависит от магнитной проницаемости μ_a (см. подразд. 5.5), которая для ферромагнитных материалов — величина непостоянная (см. подразд. 6.1). Она зависит от напряженности магнитного поля (см. формулу (5.12)), которая, в свою очередь, зависит от силы тока в контуре (см. формулы (5.23)... (5.25)). Если мы принимаем, что ток не изменяется в течение бесконечно малого промежутка времени, то индуктивность можно считать неизменной и вынести ее за знак дифференциала: $dW_M = Lidi$.

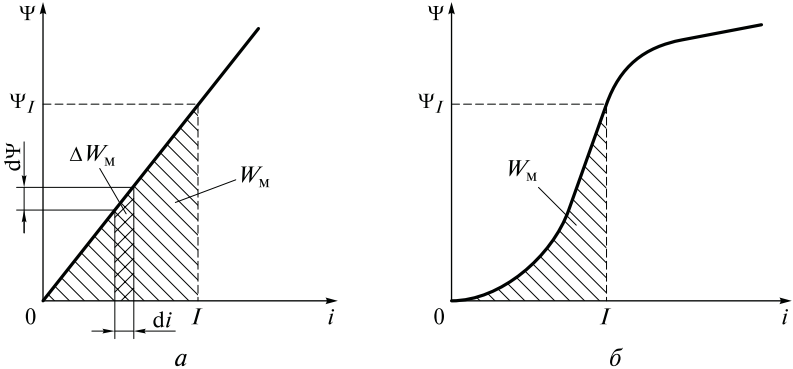


Рис. 5.21. Вебер-амперные характеристики катушки:

a — без стального магнитопровода; b — со стальным магнитопроводом

Всю энергию, приобретенную контуром за время изменения силы тока от 0 до I , можно представить в виде

$$W_M = \int_0^I Lidi = L \int_0^I idi.$$

Проинтегрировав последнее выражение и учитывая формулу (5.40), получим выражения для представления энергии магнитного поля:

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Psi I}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}. \quad (5.59)$$

Графически энергию, запасенную контуром, можно представить величиной заштрихованной площади на вебер-амперных характеристиках катушек: без стального магнитопровода (рис. 5.21, *а*) и со стальным магнитопроводом (рис. 5.21, *б*).

Контрольные вопросы

1. Что такое магнитное поле? Перечислите основные характеристики магнитного поля.
2. Как принято графически изображать магнитное поле? Приведите примеры.
3. При каких условиях магнитное поле называют стационарным, при каких — однородным, при каких — неоднородным?
4. Что представляет собой магнитный поток?
5. Как связаны величины: напряженность и индукция магнитного поля? Назовите единицы измерения напряженности магнитного поля.
6. От чего зависит магнитное напряжение между двумя точками магнитного поля, в каких единицах оно измеряется? Какая величина носит сокращенное название МДС и что она характеризует?
7. Сформулируйте закон полного тока. Каково его назначение?
8. В чем отличие магнитных свойств парамагнетиков и диамагнетиков и какова причина отличия? Каковы особенности магнетизма ферромагнитных материалов?
9. Дайте определение понятия индуктивности. Как обозначается индуктивность и в каких единицах она измеряется? Как принято изображать индуктивность в электрических схемах?
10. Что такое потокосцепление? Какое потокосцепление называется собственным, взаимным?
11. Что такое взаимная индуктивность? Как ее обозначают и в каких единицах измеряют?
12. Как влияет поток рассеяния на величину взаимной индуктивности?
13. Чем отличаются согласное и встречное включения катушек?
14. Чем определяется энергия магнитного поля контура с током?

Глава 6

МАГНИТНАЯ ЦЕПЬ

6.1. Свойства и применение ферромагнитных материалов

Намагничивание ферромагнетиков. Особенностью ферромагнитных материалов, отличающей их от парамагнетиков и диамагнетиков, является их *способность к сильному намагничиванию в магнитном поле*, вследствие которой магнитная проницаемость μ ферромагнетиков имеет очень большие значения. Например, магнитная проницаемость железа достигает значений, в тысячи раз превосходящих значения магнитной проницаемости парамагнетиков и диамагнетиков.

Другой особенностью, отличающей ферромагнетики, является то, что *магнитная проницаемость ферромагнитных материалов сильно зависит от напряженности магнитного поля*, при которой производят ее измерение. Магнитная проницаемость μ ферромагнетиков — величина непостоянная. Так, например, в слабых полях магнитная проницаемость железа достигает значений 5... 6 тыс., а в сильных полях значения μ падают до нескольких сотен и ниже.

В подразд. 5.3 были рассмотрены причины, объясняющие особенности магнетизма ферромагнетиков: под действием внешнего магнитного поля в ферромагнитном веществе происходит процесс ориентации доменов и смещение их границ: ферромагнетик намагничивается. Магнитное поле ферромагнетика, обусловленное намагниченностью, складывается с внешним полем и усиливает его.

Магнитные свойства ферромагнетиков сохраняются до тех пор, пока их температура не достигает значения, называемого точкой Кюри*. Точка Кюри для разных материалов различна: для железа (Fe) она составляет 770 °С, никеля (Ni) — 365 °С, кобальта (Co) — 1130 °С.

Первоначальная кривая намагничивания. Особенности намагничивания ферромагнетика можно проследить, изменяя ток в электрической цепи, например представленной на рис. 6.1, а, и определяя при этом значения напряженности поля H и магнитной индукции B .

При увеличении силы тока возрастает напряженность H внешнего поля, создаваемого катушкой. С усилением внешнего поля

* Кюри П. (1859—1906), французский физик.

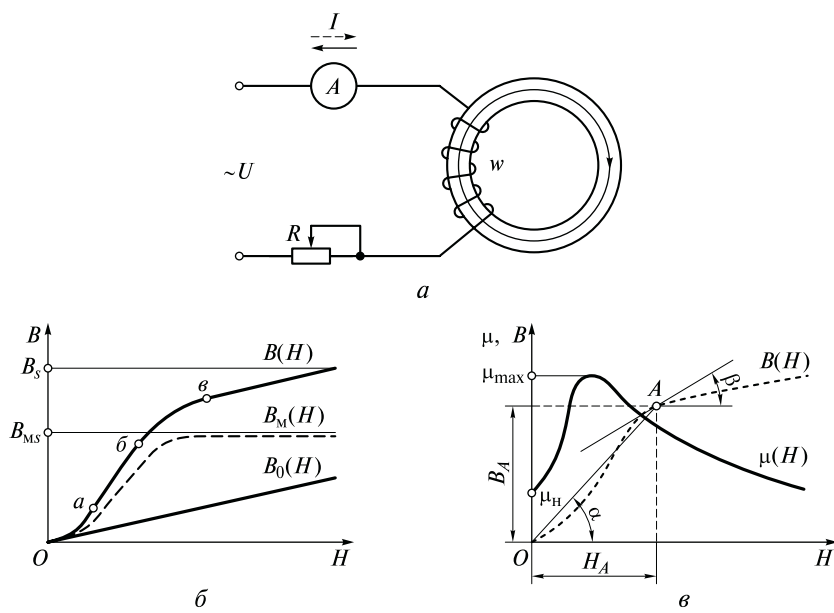


Рис. 6.1. Намагничивание ферромагнетиков:

а — электрическая схема; *б* — кривая первоначального намагничивания; *в* — график магнитной проницаемости

увеличивается число ориентированных полем доменов, что приводит к возрастанию магнитного поля ферромагнитного сердечника — внутреннего поля. Соответственно возрастает и суммарное магнитное поле. Намагничивание возрастает до определенного значения напряженности: сначала резко, затем нарастание замедляется. Начиная с некоторого значения напряженности возрастание внутреннего поля прекращается несмотря на увеличение силы тока: происходит *магнитное насыщение*. Магнитное насыщение означает, что все магнитные моменты ориентированы по направлению внешнего поля.

График зависимости $B(H)$ (B — индукция суммарного магнитного поля) называется *кривой первоначального намагничивания** (рис. 6.1, б).

Кроме того, на рис. 6.1, б показаны зависимости от напряженности H обеих составляющих индукции B : $B_0(H)$ — зависимость магнитной индукции внешнего поля в воздушной среде (при отсутствии сердечника) и $B_M(H)$ — зависимость магнитной индукции ферромагнетика (магнита), обусловленная намагниченностью. График $B_0(H) = \mu_0 H$ имеет линейный характер, так как μ_0

* Кривая намагничивания впервые была получена экспериментально в 1872 г. профессором Московского университета А. Г. Столетовым.

согласно формуле (5.7) — величина постоянная ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м), и его легко построить. График $B_M(H)$ получаем, вычитая ординаты кривой $B(H)$ и прямой $B_0(H)$.

На кривой $B(H)$ (см. рис. 6.1, б, в) можно выделить четыре участка.

1. Участок Oa соответствует малым напряженностям и имеет почти линейный характер. Он характеризуется тем, что магнитная индукция увеличивается медленно и почти пропорционально напряженности поля.

2. Участок ab почти линейный. Магнитная индукция увеличивается также почти пропорционально напряженности, но значительно быстрее.

3. Участок $bв$ отражает замедление нарастания индукции B , что говорит об ограниченном числе доменов в составе вещества сердечника.

4. Четвертый участок соответствует магнитному насыщению ферромагнетика. Он отражает медленное нарастание индукции за счет роста $B_0(H)$. Индукция, соответствующая магнитному насыщению, называется *индукцией насыщения* B_s .

Как видно из рисунка 6.1, б, зависимость $B(H)$ магнитной индукции от напряженности в присутствии ферромагнетика достаточно сложна, для нее нет простой расчетной формулы. Поэтому при расчете магнитных цепей (см. подразд. 6.2), содержащих ферромагнетики, применяют экспериментально полученные кривые намагничивания $B(H)$.

Зависимость магнитной проницаемости μ от напряженности магнитного поля H . График зависимости магнитной проницаемости μ от напряженности магнитного поля H можно построить на основании графика $B(H)$.

Абсолютная магнитная проницаемость μ_a ферромагнетика может быть определена для любой точки первоначальной кривой намагничивания по формуле (5.12). Например, для точки A (рис. 6.1, в)

$$\mu_a = \frac{B_A}{H_A} = \frac{m_B}{m_H} \operatorname{tg} \alpha,$$

где m_B и m_H — масштабы по осям координат.

Магнитная проницаемость μ определяется по формуле (5.8):

$$\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0} = \frac{m_B}{m_H} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu_0}. \quad (6.1)$$

Как видно из графика (см. рис. 6.1, в), магнитная проницаемость не является величиной постоянной, а изменяется в широ-

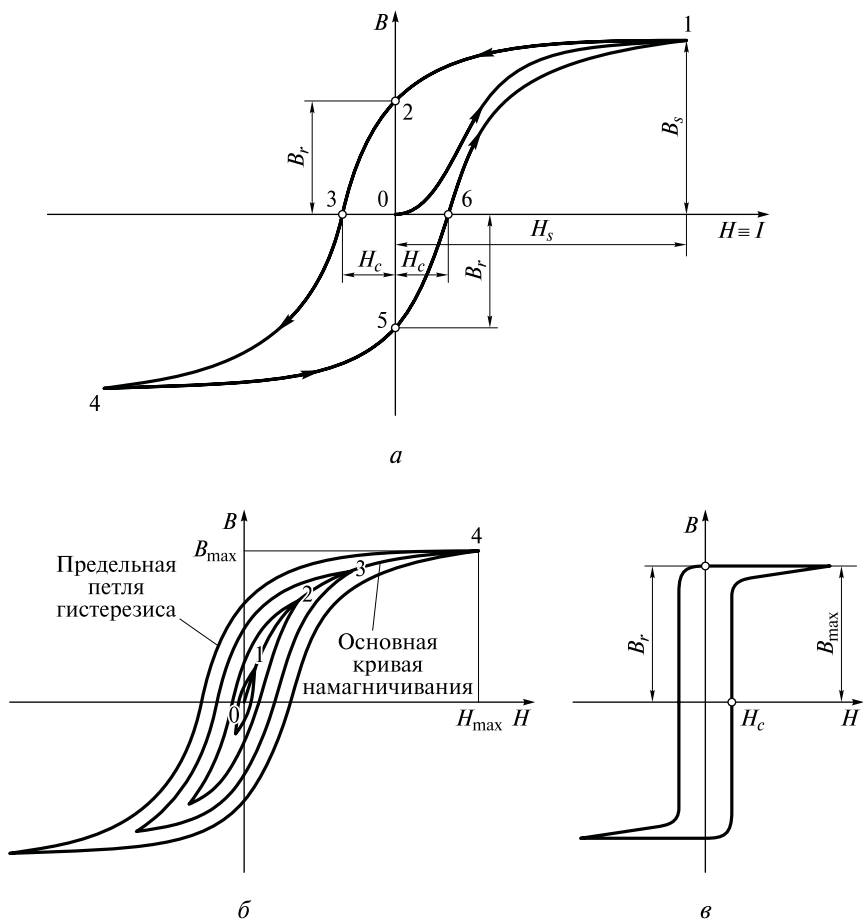


Рис. 6.2. Циклическое перемагничивание:

a — петля гистерезиса; *б* — основная кривая намагничивания и петли магнитного гистерезиса; *в* — прямоугольная петля гистерезиса

ком диапазоне. На кривой $\mu(H)$ отмечены два характерных значения магнитной проницаемости: начальное μ_n и максимальное μ_{max} .

Значение μ , определяемое выражением (6.1), называется *статическим значением* магнитной проницаемости. Более точно изменение магнитной проницаемости отражает ее *дифференциальное значение* $\mu_{диф}$.

Например, для точки *A* (см. рис. 6.1, в)

$$\mu_{диф} = \frac{dB}{dH} \frac{1}{\mu_0} = \frac{m_B}{m_H} \frac{\operatorname{tg} \beta}{\mu_0}. \quad (6.2)$$

Циклическое перемагничивание. Рассмотрим процесс перемагничивания ферромагнетика по этапам (рис. 6.2, а):

- намагничивание ферромагнетика до состояния магнитного насыщения. Увеличиваем напряженность поля до значения H_s . Процесс намагничивания проходит в соответствии с кривой первоначального намагничивания до насыщения ферромагнетика (кривая 0—1). При этом индукция достигает значения насыщения B_s (индекс s от *англ.* stout — полный);

- размагничивание при значениях тока в цепи $I \geq 0$. Намагниченный до состояния магнитного насыщения ферромагнетик начнем размагничивать, например, постепенно уменьшая ток в цепи (см. рис. 6.2). При этом интенсивность магнитного поля, характеризуемая индукцией B , начинает уменьшаться (кривая 1—2). Но кривая 1—2 не совпадает с кривой первоначального намагничивания 0—1. Уменьшение индукции «запаздывает»: кривая 1—2 проходит выше кривой 0—1. Это явление называется *магнитным гистерезисом*.

Таким образом, при уменьшении напряженности до нуля ($H = 0$) индукция не уменьшается до нуля, а имеет некоторое положительное значение. Это значение называется *остаточной индукцией* B_r (индекс r от *англ.* rest — остаток). Явление остаточного магнетизма объясняется тем, что при снятии внешнего поля определенная часть доменов сохраняет приобретенное при намагничивании направление и результирующий магнитный момент объема сердечника не уменьшается до нуля;

- размагничивание до получения значения индукции $B = 0$. Поменяем направление тока в цепи и будем постепенно увеличивать ток до тех пор, пока индукция B не достигнет нулевого значения (кривая 2—3). При этом напряженность поля достигнет некоторого значения H_c , называемого коэрцитивной силой.

Таким образом, *коэрцитивная сила* H_c (обозначение от *лат.* *coercitio* — удерживание) — напряженность магнитного поля, которая необходима, чтобы уничтожить остаточную намагниченность ферромагнетика (снизить B до нуля);

- намагничивание током обратного направления до магнитного насыщения. Постепенно увеличиваем ток обратного направления до значения, соответствующего напряженности насыщения H_s . При этом индукция B изменяется по кривой 3—4;

- размагничивание при значениях тока в цепи $I \leq 0$. Уменьшение намагниченности (кривая 4—5) протекает с «запаздыванием», аналогично кривой 1—2. При напряженности H , равной нулю, ферромагнетик остается намагниченным с остаточной индукцией, равной B_r , но имеющей противоположное направление;

- размагничивание током первоначального направления до уничтожения остаточной индукции. Изменив направление тока,

будем постепенно увеличивать его, пока сердечник не размагнитится (кривая 5—6). Индукция $B = 0$ при $H = H_c$;

- намагничивание ферромагнетика до состояния магнитного насыщения (кривая 6—1). Постепенно увеличиваем ток первоначального направления до значения, соответствующего напряженности насыщения H_s . При этом $B = B_s$. График $B(H)$ замкнулся.

График зависимости $B(H)$ имеет вид петли и поэтому называется *петлей гистерезиса*.

Если перемагничивание сердечника производить при напряжениях $H_{\max} < H_s$, то зависимости $B(H)$ тоже имеют вид петель гистерезиса (рис. 6.2, б). Наибольшая замкнутая петля, которая может быть получена для данного ферромагнитного материала, называется *предельной петлей гистерезиса*. Кривая 0—1—2—3—4, проведенная через вершины таких петель гистерезиса, проходит близко к кривой первоначального намагничивания. Эта кривая называется *основной кривой намагничивания*.

На периодическое перемагничивание затрачивается энергия, которая преобразуется в теплоту и вызывает нагрев магнитопровода. Оказывается, что *величина затрат энергии на один цикл перемагничивания пропорциональна площади, ограниченной петлей магнитного гистерезиса*.

Энергия, затраченная на процесс перемагничивания, называется *потерями от гистерезиса*. Потери от гистерезиса зависят от ферромагнитного материала (для каждого материала характерны своя форма и площадь петли гистерезиса), максимальной магнитной индукции циклического перемагничивания и числа циклов в секунду (частоты перемагничивания).

Ферромагнитные материалы. Рассмотренные ранее свойства являются общими для всех ферромагнитных материалов. Но в зависимости от химического состава ферромагнетика проявление этих общих свойств имеет свои особенности. В связи с этим ферромагнитные материалы подразделяются на две группы: *магнитомягкие и магнитотвердые*.

Магнитомягкие материалы характеризуются высокой магнитной проницаемостью и относительно малыми значениями коэрцитивной силы (менее 400 А/м) — *узкой петлей магнитного гистерезиса*.

Обладая определенными качествами, эти материалы обеспечивают создание в устройствах сильных магнитных полей при относительно небольших значениях намагничивающих сил (Iw) относительно малые потери энергии при перемагничивании.

Магнитомягкие материалы применяются везде, где необходимы материалы с указанными качествами: для устройства магнитных цепей электрических машин постоянного и переменного токов (включая трансформаторы), электромагнитных и магнитоэлектрических измерительных приборов, электромагнитов и т. д.

К этой группе материалов относятся техническое железо и низкоуглеродистые электротехнические стали, чистое электролитическое железо, листовые электротехнические стали, электротехнический чугу́н, пермаллои (железоникелевые сплавы: в среднем 80 % Ni и 20 % Fe), оксидные ферромагнетики — оксиферы (ферриты и магнитодиэлектрики) и др.

Техническое железо, низкоуглеродистые стали и чугу́н широко применяются для магнитопроводов в устройствах, работающих в условиях постоянных магнитных полей.

Электротехнические стали — сплавы железа с кремнием (1...4 %). Кремний улучшает магнитные свойства материала, в частности, уменьшаются потери энергии от гистерезиса. Кроме того, увеличивается удельное электрическое сопротивление, что важно для уменьшения *вихревых токов* (см. гл. 7), возникающих в ферромагнетике при циклически изменяющемся магнитном поле и нагревающих его.

Пермаллои — это сплавы с различным (относительно указанного ранее среднего значения) процентным содержанием железа и никеля. В этих сплавах индукция насыщения B_s достигается при относительно малых напряженностях поля, в результате чего петля гистерезиса имеет прямоугольный вид — *прямоугольная петля гистерезиса* (рис. 6.2, в).

У пермаллоев с прямоугольной петлей гистерезиса степень прямоугольности петли характеризуется отношением остаточной индукции B_r к максимальной индукции B_{max} , под которой понимают индукцию при напряженности поля, в 5—10 раз превышающую коэрцитивную силу H_c , которая лежит в пределах 1...30 А/м. Это отношение достигает значений 0,80...0,99.

Ферриты — это ферромагнитные материалы, получаемые из смеси оксидов железа, цинка и других элементов. Ферритовые детали электротехнических устройств изготавливают по следующей технологии: смесь размалывают, прессуют и отжигают при температуре около 1 200 °С.

Ферриты обладают очень большим удельным сопротивлением, вследствие чего потери от вихревых токов чрезвычайно малы, поэтому их можно применять на высокой частоте.

Магнитодиэлектрики — это материалы, получаемые из смеси мелкозернистого ферромагнитного порошка с диэлектриком (поливинилхлорид, полиэтилен). Технология изготовления та же, что и у ферритов. В результате мельчайшие частицы ферромагнетика оказываются разделенными электроизолирующей пленкой из немагнитного материала.

Изделия из ферритов и магнитодиэлектриков широко применяются в аппаратуре проводной связи и радиосвязи, в магнитных усилителях, вычислительных машинах и в других областях техники.

Магнитотвердые материалы имеют большие значения остаточной магнитной индукции и коэрцитивной силы, *широкую петлю магнитного гистерезиса*.

Магнитотвердые материалы предназначены для изготовления постоянных магнитов самого различного назначения.

К магнитотвердым материалам относятся углеродистые, вольфрамовые, хромистые и кобальтовые стали. Они обладают ковкостью, поддаются прокатке, механической обработке и выпускаются промышленностью в виде полос или листов. Их коэрцитивная сила $H_c = 5\,000 \dots 8\,000$ А/м, остаточная индукция $B_r = 0,8 \dots 1,0$ Тл.

К магнитотвердым материалам относится и ряд сплавов: альни, альниси, альнико и др. Они обладают более высокими, чем у перечисленных ранее магнитотвердых материалов, значениями коэрцитивной силы и остаточной индукции: $H_c = 20\,000 \dots 60\,000$ А/м; $B_r = 1,4 \dots 1,7$ Тл.

6.2. Расчет магнитных цепей

Магнитная цепь. *Магнитные цепи* — это совокупность устройств, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны при помощи понятий магнитодвижущей силы (МДС), магнитного потока Φ и разности магнитных потенциалов U_m .

Магнитной цепью устройства называется совокупность всех участков устройства, выполненных из ферромагнитных материалов, вдоль которых замыкаются линии магнитной индукции.

Участки магнитной цепи в общем случае могут состоять из различных ферромагнитных материалов, разной длины и площади поперечного сечения. В связи с этим магнитные цепи бывают однородными и неоднородными.

Магнитная цепь называется *однородной*, если она выполнена из одного материала и имеет постоянное сечение. Примером однородной магнитной цепи может служить магнитопровод кольцевой катушки (см. рис. 5.10, а).

Магнитная цепь, которая состоит из нескольких участков, отличающихся длиной и (или) сечением, материалом или имеющих воздушные зазоры, называется *неоднородной* (рис. 6.3, а).

Магнитные цепи, как и электрические, бывают неразветвленные и разветвленные.

В *неразветвленной* магнитной цепи магнитный поток во всех сечениях один и тот же, например поток Φ в магнитной цепи (см. рис. 6.3, а). В ветвях *разветвленных* цепей имеют место свои отдельные магнитные потоки, например Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 (рис. 6.3, б и в).

Разветвленные цепи бывают симметричными и несимметричными.

Разветвленная цепь считается *симметричной*, если ее можно мысленно разделить на несколько неразветвленных цепей таким

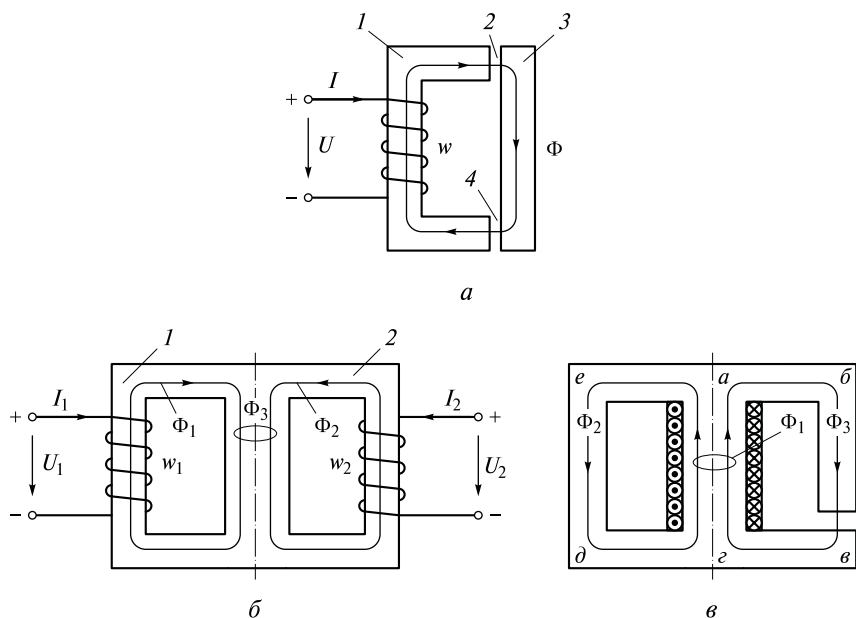


Рис. 6.3. Магнитные цепи:

a — неразветвленная; *б* — разветвленная симметричная; *в* — разветвленная несимметричная

образом, что во всех неразветвленных цепях потоки будут одинаковые. Например, разветвленная магнитная цепь (см. рис. 6.3, б) будет считаться симметричной, если в обеих ее частях потоки Φ_1 и Φ_2 равны между собой. Это возможно, когда части цепи (1, 2) выполнены из одного и того же материала, имеют одинаковые размеры и намагничивающие силы: $I_1 w_1 = I_2 w_2$.

Если указанные условия не соблюдаются, магнитная цепь относится к *несимметричным* цепям (см. рис. 6.3, в).

Законы расчета магнитных цепей. При расчетах магнитных цепей пользуются законами, аналогичными законам расчета электрических цепей: закону Ома для участка цепи и двум законам Кирхгофа. Необходимо отметить, что подобие формул для электрической и магнитной цепей только внешнее. Никаких физических аналогий явлений в электрической и магнитной цепях не существует.

Закон Ома для участка магнитной цепи. Магнитное сопротивление. Рассмотрим однородный участок магнитной цепи (например, участок 1, см. рис. 6.3, а), выполненный из определенного материала и имеющий одинаковое поперечное сечение S вдоль всей своей длины l . Пусть участок пронизывает поток Φ .

Магнитное напряжение U_M на участке цепи согласно формуле (5.14) с учетом формул (5.12) и (5.10):

$$U_M = HI = \frac{B}{\mu_a} l = \frac{\Phi}{S} \frac{l}{\mu_a}.$$

Как видно из полученного выражения, магнитное напряжение U_M прямо пропорционально потоку Φ . По аналогии с электрической цепью коэффициент пропорциональности между U_M и Φ называют *магнитным сопротивлением* участка магнитной цепи R_M . При этом

$$R_M = \frac{l}{\mu_a S}. \quad (6.3)$$

В системе СИ единицей магнитного сопротивления является $1/\text{Гн}$:

$$[R_M] = \left[\frac{l}{\mu \mu_0 S} \right] = \frac{\text{м}}{(\text{Гн}/\text{м})\text{м}^2} = \frac{1}{\text{Гн}}.$$

Магнитное сопротивление R_M ферромагнитных материалов не является величиной постоянной, поскольку магнитная проницаемость μ указанных материалов зависит от напряженности магнитного поля, созданного в материале сердечника (см. подразд. 6.1).

С учетом формулы (6.3) выражение магнитного напряжения принимает следующий вид:

$$U_M = R_M \Phi,$$

откуда

$$\Phi = \frac{U_M}{R_M}. \quad (6.4)$$

Выражение (6.4) условно называют *законом Ома для участка магнитной цепи*, так как оно по форме напоминает закон Ома для участка электрической цепи с той разницей, что на месте электрического напряжения стоит магнитное напряжение U_M , на месте тока — поток Φ .

Воздушный зазор, даже незначительных размеров, оказывает значительное влияние на общее магнитное сопротивление магнитопровода.

Пример 6.1. Предположим, что в стальном сердечнике длиной l имеется воздушный зазор длиной $\delta = 0,01l$ и магнитная проница-

емость стали $\mu_{ст} = 1000$. Определить, в каком соотношении находятся магнитные сопротивления стального участка сердечника $R_{ст}$ и воздушного зазора R_{δ} . Оценить влияние длины воздушного зазора на величину намагничивающей силы, необходимой для создания заданного потока Φ .

Решение.

Примем, что магнитная проницаемость воздуха $\mu_{в} = 1$; площадь поперечного сечения воздушного зазора принимается равной площади стального участка S . Согласно формуле (6.3) отношение магнитного сопротивления воздушного зазора R_{δ} к магнитному сопротивлению стали $R_{ст}$:

$$\frac{R_{\delta}}{R_{ст}} = \frac{\delta}{\mu_0 S} \frac{\mu_{ст} \mu_0 S}{l} = \frac{0,01l \cdot 1000}{l} = 10,$$

откуда

$$R_{\delta} = 10R_{ст}.$$

На основании формулы (5.16) с учетом формул (5.12) и (5.10) можно доказать, что общее магнитное сопротивление неразветвленной магнитной цепи (или неразветвленного участка цепи) равно сумме магнитных сопротивлений составляющих ее участков. Таким образом, в рассматриваемом примере $R_M = R_{ст} + R_{\delta} = 11R_{ст}$, т.е. в 11 раз больше, чем при отсутствии воздушного зазора. Согласно формуле (6.4) для получения того же магнитного потока Φ при наличии воздушного зазора требуется в 11 раз большее магнитное напряжение U_M , чем без него, и согласно закону полного тока (см. формулу (5.18)) во столько же раз бóльшая намагничивающая сила Iw . Это отразится на размерах устройства и режиме его работы. Поэтому при создании электромагнитных устройств в тех случаях, когда по условиям работы без воздушного зазора обойтись нельзя, принимают все возможные меры для сокращения длины воздушного зазора δ .

Первый закон Кирхгофа вытекает из непрерывности магнитных линий, т.е. непрерывности магнитного потока. Из этого следует, что *алгебраическая сумма магнитных потоков в точке разветвления равна нулю*:

$$\sum_{алг} \Phi = 0. \quad (6.5)$$

При этом потоки, входящие в точку разветвления (узел), считаются положительными (входят в уравнение со знаком «+»), а выходящие из нее — отрицательными (со знаком «-»).

Например, для точки разветвления магнитного потока Φ_3 (см. рис. 6.3, б) уравнение (6.5) имеет вид

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0.$$

Второй закон Кирхгофа для магнитной цепи основывается на законе полного тока (5.18). Из выражения (5.18) следует, что *алгебраическая сумма магнитных напряжений на отдельных участках цепи вдоль магнитной силовой линии равна алгебраической сумме магнитодвижущих сил, пронизывающих поверхность, стянутую силовой линией*:

$$\sum_{\text{алг}} U_m = \sum_{\text{алг}} (Iw). \quad (6.6)$$

Прямая и обратная задачи расчета магнитных цепей. Конструирование магнитных цепей связано с решением целого комплекса вопросов, связанных с выбором размеров, формы, материалов. Решению этих вопросов посвящены специальные курсы.

Для сконструированной или уже изготовленной магнитной цепи, когда размеры, материал, расположение обмоток уже известны, существует свой комплекс вопросов, которые также требуют решения. Нас будут интересовать именно эти вопросы. Обычно расчет предполагает решение задач двух типов:

- задан магнитный поток в той или иной части магнитной цепи. Требуется определить намагничивающие силы, необходимые для создания этого потока (*прямая задача*);
- по заданным намагничивающим силам определить распределение магнитных потоков в различных участках магнитной цепи (*обратная задача*).

Расчет неразветвленной неоднородной магнитной цепи. *Неоднородная* магнитная цепь отличается следующими свойствами: она состоит из нескольких участков, которые в общем случае отличаются длиной, поперечным сечением и материалом. Кроме того, участки из ферромагнитных материалов могут быть разделены воздушными зазорами. Если к тому же все участки цепи пронизывает один и тот же поток, то она является неразветвленной.

Порядок решения прямой задачи. При решении прямой задачи следует определить намагничивающие силы, необходимые для создания заданного потока следующим образом:

1) расчет магнитной индукции участков цепи. Разбиваем неоднородную магнитную цепь на n однородных участков, имеющих одинаковый материал и площадь поперечного сечения по всей длине участка.

Используя заданные геометрические размеры магнитной цепи, вычисляем площадь поперечного сечения S_n для каждого из n участков.

Площадь поперечного сечения воздушного зазора считается равной площади сечения прилегающего ферромагнитного участка.

По известному потоку Φ (он одинаковый во всех участках неразветвленной цепи) вычисляем магнитную индукцию B_n для каж-

дого из n однородных участков заданной магнитной цепи по формуле (5.10):

$$B_n = \frac{\Phi}{S_n};$$

2) расчет напряженности поля для каждого из n участков. Для участков из ферромагнитных материалов напряженность поля H_n определяется по известной индукции с помощью кривой намагничивания материала (зависимость $B(H)$). Напряженность магнитного поля H_n n -го участка считается одинаковой во всех точках этого участка.

Для участков из неферромагнитных материалов (в том числе для воздушных зазоров) напряженность поля согласно формуле (5.12):

$$H_{0n} = \frac{B_{0n}}{\mu_0};$$

3) расчет намагничивающей силы. Согласно второму закону Кирхгофа для магнитной цепи (см. формулу (6.6)) намагничивающая сила

$$F = \sum_{\text{алг}} (I_k w_k) = \sum_{\text{алг}} (H_n l_n), \quad (6.7)$$

где l_n — длина n -го участка, взятая по средней линии; k — порядковый номер обмотки, участвующей в создании общей МДС.

Порядок решения обратной задачи. При решении обратной задачи (определение магнитного потока по заданной МДС) невозможно воспользоваться ни вторым законом Кирхгофа для магнитной цепи (6.6), ни законом Ома (6.4). В первом случае неизвестно распределение общего магнитного напряжения по участкам цепи. Во втором случае нельзя определить магнитное сопротивление участков из ферромагнитных материалов, так как неизвестна их магнитная проницаемость, которая зависит от неизвестной еще индукции. Для решения задачи можно использовать *графоаналитический подход*.

Графоаналитическое решение обратной задачи с использованием метода последовательных приближений.

1. Определение значений намагничивающих сил для нескольких заданных (произвольно или обоснованно) значений магнитного потока Φ (см. порядок решения прямой задачи).

При наличии в цепи воздушных зазоров первое значение потока можно задать расчетом, принимая магнитное сопротивление

всей цепи равным общему сопротивлению воздушных зазоров. Основанием для такого выбора является то, что даже незначительный воздушный зазор имеет значительно большее магнитное сопротивление, чем сопротивление участков из ферромагнитных материалов (см. пример 6.1), и определяет значение общего магнитного сопротивления.

2. Построение кривой намагничивания магнитной цепи — зависимости потока Φ от намагничивающей силы Iw по нескольким расчетным значениям.

3. Определение искомого значения потока по кривой намагничивания по заданному значению намагничивающей силы.

Расчет разветвленной магнитной цепи. При расчете разветвленных цепей также рассматриваются прямая и обратная задачи.

Расчет разветвленной симметричной цепи (см. рис. 6.3, б) сводится к расчету *одной из неразветвленных цепей* с одинаковыми потоками, на которые мысленно делится разветвленная цепь. При этом поток в каждой из неразветвленных цепей равен половине потока среднего стержня:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3/2.$$

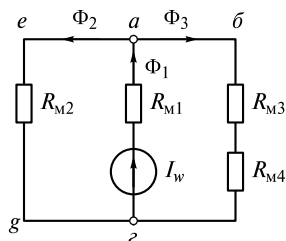
Порядок решения прямой и обратной задач для таких цепей уже рассмотрен нами ранее.

Расчет разветвленной несимметричной цепи. В несимметричной магнитной цепи поток в узле делится на неравные части. Однако для любого узла магнитной цепи справедлив первый закон Кирхгофа (см. формулу (6.5): $\sum_{\text{алг}} \Phi = 0$, а для любого выбранного контура можно составить уравнение по второму закону Кирхгофа для магнитной цепи (см. формулу (6.6)). Используя законы Кирхгофа и рассмотренные методы решения задач, можно решить и прямую, и обратную задачи.

Графический метод расчета магнитных цепей. Пользуясь понятием магнитного сопротивления, магнитную цепь можно представить эквивалентной электрической схемой: схемой замещения. Например, на рис. 6.4, показана схема замещения магнитной цепи, приведенной на рис. 6.3, в. На схеме R_{M1} , R_{M2} , R_{M3} и R_{M4} — полные магнитные сопротивления соответствующих участков цепи (первые три — ферромагнитных, последнее — сопротивление воздушного зазора).

Располагая схемой замещения, расчет магнитной цепи можно выполнить аналогично расчету электрических цепей одним из рассмотренных в гл. 3 методов. Например, можно воспользоваться методом уравнений Кирхгофа, составив для магнитной цепи систему уравнений по первому и второму законам Кирхгофа. Однако для магнитной цепи — это система нелинейных уравнений, так

Рис. 6.4. Схема замещения магнитной цепи



как коэффициенты уравнений — сопротивления магнитной цепи — имеют нелинейный характер, связанный с непостоянством значений магнитных проницаемостей ферромагнитных материалов. В связи с этим расчет магнитных цепей проще выполнить графическим методом, аналогично расчету электрических нелинейных цепей (см. подразд. 4.2).

Контрольные вопросы

1. Опишите процесс циклического перемагничивания. В чем состоит явление магнитного гистерезиса? Объясните его физическую суть. Что называют остаточной индукцией? Дайте определение коэрцитивной силы.
2. Что называют петлей гистерезиса? Что представляют собой потери от гистерезиса и что характеризует их величину?
3. Сформулируйте законы, применяемые для расчета магнитных цепей.
4. Что изменится, если катушку, представленную на рис. 6.3, в, разместить на другом стержне магнитопровода?
5. Почему магнитные цепи относят к нелинейным цепям?
6. Как определяют напряженность магнитного поля в воздушном зазоре магнитопровода и как — в участке цепи, выполненном из ферромагнитного материала?
7. Почему для расчета магнитных цепей применяют графоаналитический метод?
8. Изложите порядок расчета потока в неразветвленной магнитной цепи по известному значению намагничивающей силы.
9. Что представляет собой схема замещения магнитной цепи и каково ее назначение?

Глава 7

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

7.1. Электродвижущая сила электромагнитной индукции

Наведение ЭДС в проводнике, движущемся в магнитном поле. Явление электромагнитной индукции было открыто Майклом Фарадеем* в 1831 г. Сущность явления заключается в том, что *в проводящем теле, пересекающем магнитные силовые линии при движении в магнитном поле, наводится электродвижущая сила.* Наведенная ЭДС получила название *ЭДС электромагнитной индукции.*

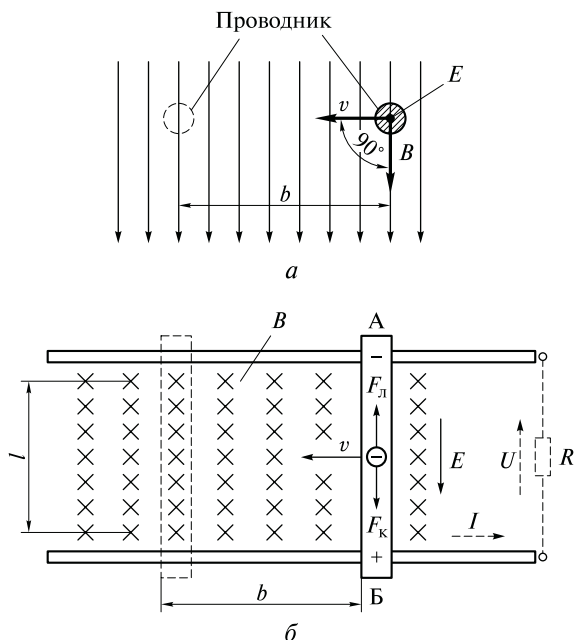
Явление электромагнитной индукции можно легко объяснить с помощью представления о силах Лоренца (см. подразд. 5.4).

Представим себе какое-нибудь проводящее тело (например, отрезок прямолинейного провода), движущееся в однородном магнитном поле с постоянной скоростью v в направлении действия механической силы $F_{\text{мех}}$. Для простоты рассуждений предположим, что ось проводника, направления векторов индукции магнитного поля B и скорости движения v взаимно перпендикулярны между собой (рис. 7.1, а).

Движение проводника является в то же время движением положительных и отрицательных зарядов, входящих в состав молекул этого проводника. При этом и те, и другие заряды движутся вместе с проводником в одну сторону — в сторону движения самого проводника. Магнитное поле B действует на заряженные частицы силами Лоренца (лоренцовыми силами) $F_{\text{л}}$, стремясь пе-

* Фарадей М. (1791—1867) — английский физик. Замечательные работы М. Фарадея по электричеству и магнетизму, начатые в 1830 г., составили эпоху в развитии физики. Открытие электромагнитной индукции, пара- и диамагнетизма, исследования в области электрохимии (М. Фарадею принадлежат такие термины, как электрод, анод, катод) — таков далеко не полный перечень сделанных им открытий. М. Фарадей не написал ни одной формулы сложнее пропорции, тем не менее ему мы обязаны созданием одного из основных понятий физики — понятия поля; он ввел и образное представление поля — картину силовых линий. «Идеи Фарадея, изложенные труднопонятным, абстрактным языком, медленно прокладывали себе дорогу, до тех пор пока они не нашли в Дж. К. Максвелле замечательного интерпретатора», — писал Г. Гельмгольц. Дж. К. Максвелл отмечал в «Трактате об электричестве и магнетизме»: «Фарадей своим умственным взором видел силовые линии, пронизывающие все пространство, там, где математики видели центры сил, притягивающих на расстоянии; Фарадей видел среду там, где они не видели ничего кроме расстояния...».

Рис. 7.1. Наведение ЭДС в проводе, движущемся в магнитном поле: a — направления индукции B , скорости v и ЭДС E ; b — направления сил $F_{\text{л}}$ и $F_{\text{к}}$



ремещать положительные заряды в одну сторону, а отрицательные — в другую. Это приводит к разделению зарядов.

Направление сил $F_{\text{л}}$, результирующие которых называются *электромагнитными силами*, можно определить по правилу левой руки (см. подразд. 5.4). Согласно этому правилу электромагнитные силы, действующие и на положительные, и на отрицательные заряды, направлены вдоль проводника в разные стороны.

В случае движения металлического провода вдоль провода могут перемещаться только свободные электроны (положительные ионы, составляющие основу кристаллической решетки материала, не могут перемещаться), которые накапливаются на одном конце провода; на другом конце образуется нескомпенсированный положительный заряд.

На рис. 7.1, б показан проводник АБ, который перемещается в направлении механической силы $F_{\text{мех}}$ с постоянной скоростью v по металлическим шинам в однородном магнитном поле, силовые линии которого направлены за плоскость рисунка (показаны крестиком).

По мере накопления зарядов на концах проводника растет электрическое поле этих зарядов, возникает и нарастает их взаимодействие. На каждую заряженную частицу со стороны электриче-

ского поля начинают действовать кулоновские силы F_k (силы Кулона). Силы F_l и F_k , действующие на заряженные частицы, направлены в разные стороны. На рис. 7.1, б показаны силы F_l и F_k , действующие на электрон.

Если проводник движется с постоянной скоростью, электромагнитные силы F_l не изменяются, так как не изменяются величины, входящие в формулу (5.30): $F = BIl$ (здесь ток I — это заряд частиц проводника, переносимых вместе с ним в единицу времени). В то же время силы F_k растут по мере накопления зарядов на концах проводника. Когда силы становятся равными ($F_l = F_k$), разделение зарядов прекращается и между концами проводника устанавливается определенная *разность потенциалов*. Эта разность потенциалов и является ЭДС электромагнитной индукции. Наведенную ЭДС можно обнаружить, если к концам проводника, движущегося в магнитном поле, подключить гальванометр.

Если проводник АБ входит в замкнутый проводящий контур, как показано на рис. 7.1, б, то под действием наведенной ЭДС в контуре устанавливается постоянное перемещение электронов — электрический ток I . При этом в правой части контура ток I течет от Б к А через сопротивление R (от «+» к «-»). Так как при течении тока заряд на концах проводника АБ уменьшается (за счет переноса электронов от конца А и компенсации положительных ионов на конце Б), то равновесие F_l и F_k нарушается и устанавливается постоянное неравенство $F_l > F_k$. В результате этого в проводнике АБ происходит непрерывное перемещение зарядов, т.е. в проводнике АБ течет ток I , направленный от А к Б (направление тока противоположно движению электронов). Таким образом, обеспечивается постоянное течение тока по замкнутому пути.

Направление индуцированной ЭДС в проводнике АБ определяется действием результирующей силы $F = F_l - F_k$ на положительный заряд, т.е. ЭДС направлена против движения электронов внутри проводника — от «-» к «+». Оно совпадает с направлением тока в проводнике АБ, если контур замкнут.

Закон электромагнитной индукции. Помимо описанного опыта с движущимся в однородном магнитном поле проводником, М. Фарадей проводил разнообразные и многочисленные эксперименты с проводящими контурами, пронизываемыми изменяющимися во времени (переменными) магнитными полями. Физические эксперименты показали, что переменное во времени магнитное поле оказывает непосредственное влияние на помещенные в него проводники, наводя в них ЭДС.

Рассмотрим некоторые эксперименты, в ходе которых проявляется электромагнитная индукция (рис. 7.2):

- внутрь цилиндрической катушки, концы которой соединены с гальванометром, с определенной скоростью вводится постоянный магнит. Стрелка гальванометра отклоняется, обнаруживая элек-

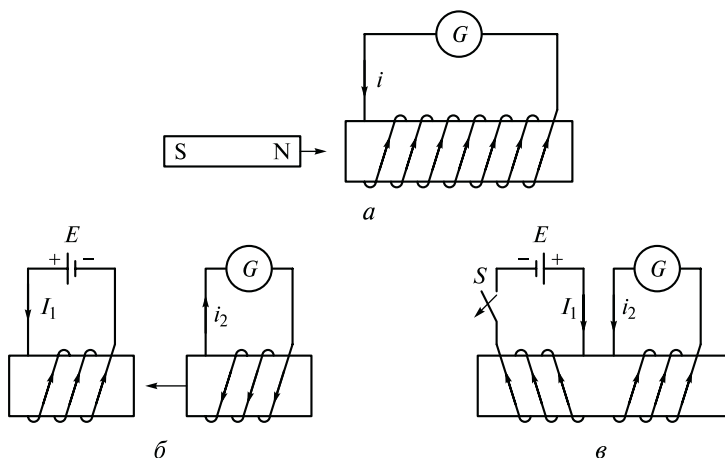


Рис. 7.2. Изображение опытов для наблюдения явления электромагнитной индукции:

a — наведение ЭДС в катушке при перемещении магнита по направлению к катушке; *б* — наведение ЭДС в катушке (правая) при ее перемещении к катушке с током (левая); *в* — наведение ЭДС в электрически не связанных катушках при включении-выключении тока в левой катушке

трический ток в катушке (рис. 7.2, *a*). При удалении магнита от катушки стрелка гальванометра отклоняется в обратную сторону;

- гальванометр обнаруживает ток в катушке, если перемещать ее относительно другой катушки с током (рис. 7.2, *б*);

- на рис. 7.2, *в* показаны две катушки, расположенные на одном сердечнике, но электрически не связанные друг с другом. Однако при замыкании и размыкании ключа в цепи одной из катушек наблюдается отклонение стрелки гальванометра в цепи второй катушки.

Одинаковый результат опытов, несмотря на их различие, дает основание полагать, что причина возникновения тока в катушках, подключенных к гальванометру, одинакова.

Эта причина — изменение потокосцепления с витками катушек или за счет перемещения (см. рис. 7.2, *a, б*), или за счет изменения тока и связанного с ним потока при замыкании и размыкании ключа (см. рис. 7.2, *в*), что вызывает появление электродвижущей силы электромагнитной индукции в витках (контурах). В результате проведенных экспериментов установлено и позднее теоретически обосновано Дж. К. Максвеллом* количественное выражение для ЭДС электромагнитной индукции:

* Максвелл Дж. К. (1831—1879) — английский физик, первый директор Кавендишской лаборатории в Кембридже, которая стала центром развития экспериментальной физики.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (7.1)$$

Это соотношение носит название *закона электромагнитной индукции: электродвижущая сила, индуцируемая в замкнутом контуре при изменении сцепленного с ним магнитного потока, равна скорости изменения потокосцепления, взятой с отрицательным знаком.*

В общем случае скорость изменения потокосцепления непостоянна, в результате чего ЭДС также непостоянна. Поэтому ее обозначают строчной буквой e и называют мгновенным значением ЭДС.

ЭДС, наводимая в катушке. В катушке, имеющей несколько витков, общая ЭДС зависит от числа витков w .

Если все витки катушки сцеплены с одинаковым потоком, то ЭДС будет в w раз больше, чем ЭДС одиночного контура:

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt}. \quad (7.2)$$

В общем случае витки катушки могут быть сцеплены с разными потоками. Так как витки соединены последовательно, в этом случае ЭДС определяется как сумма ЭДС от отдельных потоков, но с учетом знака наведенной ЭДС, т. е. как алгебраическая сумма ЭДС:

$$e = \sum_{\text{алг}} e_i = -\frac{d \sum (w_i \Phi_i)}{dt}, \quad (7.3)$$

где i — число разных потоков, сцепленных со своими витками w_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Согласно формуле (5.39) правая часть выражения (7.3) представляет собой общее потокосцепление. Таким образом, ЭДС катушки определяется скоростью изменения общего потокосцепления катушки, взятой с отрицательным знаком:

$$e = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (7.4)$$

Формула (7.4) отражает закон электромагнитной индукции в общем виде.

Определение ЭДС, наводимой в проводнике, движущемся в магнитном поле. Воспользуемся законом электромагнитной индукции для вывода расчетной формулы ЭДС, наводимой в проводнике при его движении в магнитном поле (см. рис. 7.1, б).

Проводник АБ, отрезки шин и сопротивление образуют замкнутый проводящий контур. Для определения наведенной в контуре ЭДС согласно выражению (7.1) необходимо определить скорость изменения потока.

За время Δt , двигаясь с постоянной скоростью v , проводник проходит путь b . При этом магнитный поток, сцепленный с контуром, увеличивается за счет увеличения площади поверхности ΔS , пронизываемой потоком, сцепленным с контуром. Приращение магнитного потока

$$\Delta\Phi = B\Delta S = Bbl,$$

где l — длина части проводника AB , находящейся в магнитном поле.

Тогда абсолютное значение ЭДС

$$e = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B \frac{b}{\Delta t} l = Bvl. \quad (7.5)$$

Если индукция B , скорость v и длина l постоянны, то и ЭДС будет постоянной.

Значение наведенной ЭДС определяется только нормальной к вектору индукции B составляющей вектора скорости $v_n = v \sin \alpha$.

Таким образом, если проводник перемещается под углом α к направлению силовых линий поля (рис. 7.3, а), т.е. между векторами B и v имеется угол α , то:

$$E = Bv_n l = Bvl \sin \alpha. \quad (7.6)$$

Из формулы (7.6) очевидно, что ЭДС максимальна при $\alpha = 90^\circ$ и равна нулю при $\alpha = 0$ (когда проводник движется параллельно линиям магнитной индукции).

Правило правой руки. Для определения направления ЭДС, наводимой в движущемся относительно магнитного потока проводнике, на практике используется *правило правой руки* (рис. 7.3, б): *если расположить правую руку перпендикулярно магнитному потоку так, чтобы магнитные силовые линии входили в ладонь, большой палец, отогнутый перпендикулярно к остальным че-*

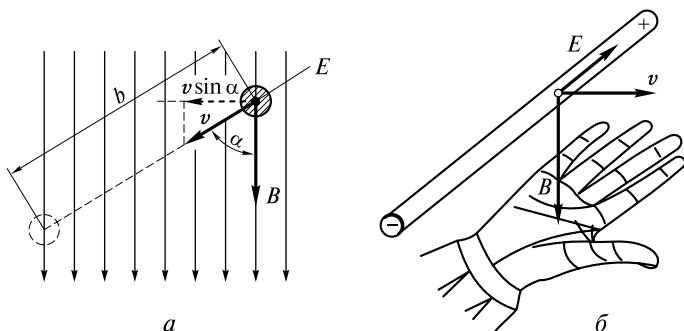


Рис. 7.3. Движение провода под углом α к силовым линиям магнитного поля (а) и правило правой руки (б)

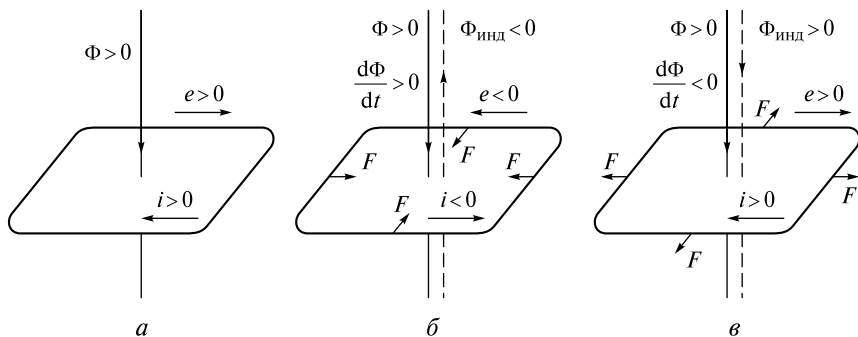


Рис. 7.4. Определение направлений наведенной ЭДС по закону электромагнитной индукции:

a — положительные направления потока и наведенной ЭДС; *б* — $\Phi > 0$ и $\frac{d\Phi}{dt} > 0$;

$$в — \Phi > 0 \text{ и } \frac{d\Phi}{dt} < 0$$

тырем, показывал направление движения проводника, то вытянутые четыре пальца покажут направление ЭДС электромагнитной индукции.

Все, что было сказано о возникновении индуцированной ЭДС в проводнике, справедливо и в случае, когда проводник неподвижен, а движется магнитное поле, например, в виде системы магнитных полюсов. Главное, чтобы линии магнитной индукции пересекали проводник. В этом случае, используя правило правой руки, учитывают, что проводник движется относительно поля в сторону, противоположную движению поля (например, магнитных полюсов).

Определение направления наведенной ЭДС с помощью закона электромагнитной индукции. В общем случае направление индуцированной ЭДС можно определить с помощью закона электромагнитной индукции (см. формулу (7.1)).

Пример 7.1. Определить направление ЭДС, наведенной в контуре (рис. 7.4), при увеличении и уменьшении потока, пронизывающего контур.

Решение. Примем положительными направления потока и наведенной в контуре ЭДС, удовлетворяющие правилу буравчика — правоходового винта (рис. 7.4, *a*).

Предположим, что положительный магнитный поток ($\Phi > 0$), пронизывающий контур, увеличивается (рис. 7.4, *б*).

Тогда приращение потока, пронизывающего контур, и скорость его изменения положительны:

$$d\Phi > 0 \text{ и } \frac{d\Phi}{dt} > 0.$$

В этом случае согласно формуле (7.1) $e = -\frac{d\Phi}{dt} < 0$, т.е. индуцированная ЭДС — отрицательна и, следовательно, направлена противоположно положительному направлению ЭДС (см. рис. 7.4, а).

Предположим теперь, что положительный поток ($\Phi > 0$), пронизывающий контур, уменьшается: $d\Phi < 0$ и $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ (рис. 7.4, в).

Тогда согласно формуле (7.1) наведенная ЭДС $e = -\frac{d\Phi}{dt} > 0$, т.е. имеет положительное направление, такое же, как на рис. 7.4, а.

Отметим интересные явления, сопровождающие процесс наведения ЭДС в контуре.

Индукцированный в контуре ток i , направление которого совпадает с направлением e , создает вторичный магнитный поток $\Phi_{\text{инд}}$, который можно определить по правилу буравчика. Оказывается, что вторичный поток $\Phi_{\text{инд}}$ всегда направлен таким образом, что препятствует изменению потока, пронизывающего контур. Когда первичный поток Φ возрастает (см. рис. 7.4, б), поток $\Phi_{\text{инд}}$ направлен ему навстречу и способствует уменьшению результирующего потока сквозь контур. Когда поток Φ уменьшается (рис. 7.4, в), поток $\Phi_{\text{инд}}$ направлен согласно с потоком Φ и способствует увеличению результирующего потока сквозь контур.

Появление в контуре индуцированного тока сопровождается возникновением электромагнитных сил F (направление сил определяется по правилу левой руки). В случае увеличения потока эти силы пытаются стянуть контур (см. рис. 7.4, б), в случае уменьшения потока — растягивать контур (см. рис. 7.4, в). Уменьшение или увеличение поверхности, ограниченной контуром, вызывает уменьшение или увеличение потока, сцепленного с контуром.

Таким образом, при изменении потока, сцепленного с контуром, имеет место *электромагнитная инерция*. Электромагнитная инерция в системах контуров с токами подобна механической инерции в системах движущихся тел: при всяком изменении скорости возникают силы инерции, препятствующие этому изменению.

Правило Ленца. Еще в 1833 г. (практически в то же время, когда М. Фарадей открыл явление электромагнитной индукции) русский академик, профессор Петербургского университета Э. Х. Ленц установил общее правило (*правило Ленца*) для определения наведенной ЭДС и тока в проводящем контуре при изменении сцепленного с контуром потока. Сущность его заключается в следующем: *ток, возникающий в контуре, под действием наведенной ЭДС, всегда направлен таким образом, что созданный им поток препятствует изменению магнитного потока, пронизывающего контур.* Как

было показано в примере 7.1, закон Максвелла, сформулированный им позже, полностью подтверждает это правило.

С помощью правила Ленца легко определить направления наведенных ЭДС и тока, не привлекая для этого закон Максвелла. При этом направления определяются в следующем порядке:

- зная направление первичного потока и характер его изменения (уменьшается или увеличивается), определяется направление индуцированного (вторичного) потока, созданного наведенным током.

Если первичный поток увеличивается, то поток от наведенного тока согласно правилу Ленца направлен встречно первичному и препятствует его нарастанию; если поток, пронизывающий контур, уменьшается, то поток от наведенного тока направлен согласно первичному потоку (в ту же сторону) и поддерживает его;

- по направлению индуцированного потока по правилу буравчика определяются направления наведенных тока и ЭДС.

Правило Ленца отражает проявление электромагнитной инерции в системах контуров с токами, учтенное в формулах (7.1) ... (7.4) закона электромагнитной индукции Максвелла в виде знака «-».

ЭДС самоиндукции и ЭДС взаимной индукции. ЭДС электромагнитной индукции наводится в контуре (катушке) от изменения любого потока, пронизывающего контур или витки катушки, в том числе и от изменения потока от тока, протекающего в самом контуре (катушке).

ЭДС самоиндукции. Явление возникновения ЭДС в контуре, вызванное изменением тока в этом же контуре, называется *самоиндукцией*. ЭДС, наведенная от изменения собственного потока сцепления в контуре или катушке, называется *ЭДС самоиндукции* e_L .

Согласно формуле (7.4) с учетом формулы (5.40) ЭДС самоиндукции

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L \frac{di}{dt}, \quad (7.7)$$

где предполагается, что индуктивность L не зависит от тока i . Это справедливо, когда катушка не имеет ферромагнитного сердечника.

Таким образом, ЭДС самоиндукции пропорциональна индуктивности и скорости изменения тока в цепи. Чем больше скорость изменения тока в цепи, тем больше наведенная ЭДС.

Из формулы (7.7) следует, что ЭДС самоиндукции препятствует изменению тока в цепи контура, т. е. при увеличении тока препятствует его росту, а при уменьшении тока задерживает его падение. Поэтому направление ЭДС самоиндукции определяется по правилу Ленца: если ток в цепи растет, то e_L направлена навстречу току; если ток уменьшается, то e_L направлена одинаково с током.

ЭДС взаимной индукции. При изменении взаимного потокоцепления контуров (катушек) в катушках наводится ЭДС взаимной индукции e_M .

Для системы индуктивно связанных катушек (см. рис. 5.19) ЭДС взаимной индукции согласно формуле (7.4) с учетом формулы (5.46) имеют вид:

$$e_{M1} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt}; e_{M2} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt},$$

или

$$e_{M1} = -M \frac{di_2}{dt}; e_{M2} = -M \frac{di_1}{dt}. \quad (7.8)$$

Из выражения (7.8) следует, что ЭДС взаимной индукции в данной катушке пропорциональна скорости изменения тока в соседней катушке. Коэффициентом пропорциональности является взаимная индуктивность системы катушек M .

ЭДС взаимной индукции первой катушки противодействует изменению тока во второй катушке, и наоборот. Например, при увеличении тока во второй катушке индуцированный ток в первой катушке создает поток, направленный встречно увеличивающемуся потоку второй катушки.

Таким образом, ЭДС самоиндукции и ЭДС взаимной индукции характеризуют величину электромагнитной инерции системы взаимно связанных катушек. Следовательно, индуктивность, взаимная индуктивность, а также скорости изменения токов в катушках определяют инертность в электромагнитной системе.

Направление ЭДС взаимной индукции совпадает с индуцированным током, направление которого определяется с помощью правила буравчика в соответствии с направлением индуцированного потока.

Вихревые токи. При исследовании электрических и магнитных полей было замечено, что тела из проводящих материалов (например, сталь, медь, алюминий), расположенные в изменяющемся магнитном поле, нагреваются. И чем больше скорость изменения магнитного поля, тем больше степень нагревания проводников.

Это явление можно объяснить с помощью закона электромагнитной индукции.

Рассмотрим катушку с переменным током i , внутри которой находится металлический сердечник (рис. 7.5, а). При направлении тока i , показанном на рис. 7.5, а, в сердечнике создается переменный магнитный поток Φ , направленный вдоль оси сердечника вверх в соответствии с правилом буравчика.

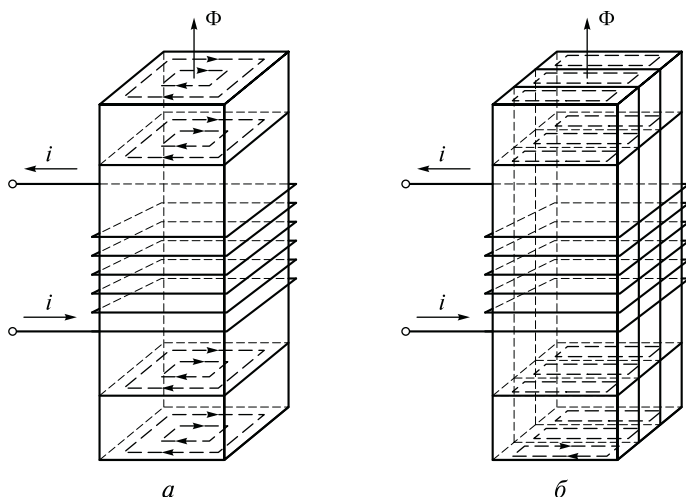


Рис. 7.5. Вихревые токи:

а — в сплошном стальном сердечнике; *б* — в шихтованном сердечнике

Металлический сердечник можно мысленно разделить на ряд параллельных друг другу слоев, ось которых совпадает с осью сердечника. Каждый такой слой представляет собой перпендикулярный потоку замкнутый виток. Переменный поток Φ , пронизывая замкнутые витки — слои сердечника, индуцирует в каждом из них ЭДС электромагнитной индукции. Наведенные ЭДС создают в плоскостях, перпендикулярных потоку, переменные токи, совпадающие с ЭДС по направлению. Эти токи называются *вихревыми токами*.

Вихревые токи, наведенные в сплошном стальном сердечнике при прохождении переменного тока i по виткам катушки, создают свое магнитное поле, оказывающее противодействие изменению первичного магнитного поля катушки. Их направление можно определить по правилу Ленца. На рис. 7.5, *а* штриховыми линиями показаны вихревые токи для случая, когда первичный поток

Φ растет: $\frac{d\Phi}{dt} > 0$.

Вихревые токи в соответствии с законом Джоуля—Ленца (см. подразд. 2.8) сопровождаются выделением теплоты в сердечнике. Это явление широко используется на практике для нагревания металлов и в других целях, например для индукционной плавки металлов и индукционного нагрева при поверхностной закалке стальных деталей.

В сердечниках электрических машин, трансформаторов и электрических аппаратов вихревые токи вызывают дополнительный нагрев в деталях устройств и могут создать опасный режим рабо-

ты, что нежелательно. Кроме того, нагревая магнитопровод (сталь), вихревые токи вызывают непроизводительный расход энергии, что увеличивает общие потери энергии в устройствах и снижает КПД электромагнитных механизмов. Эти потери энергии называются *потерями от вихревых токов*. Вихревые токи в этом случае необходимо подавлять.

В целях уменьшения потерь энергии сердечники устройств переменного тока собираются из листовой электротехнической стали (толщина 0,35 мм), листы которой изолируются друг от друга специальными лаками. Этот метод борьбы с вихревыми токами называется *шихтовкой*. Уменьшение вихревых токов таким способом достигается благодаря тому, что контуры, по которым в сплошном сердечнике замыкаются вихревые токи, оказываются разрезанными на части, изолированные друг от друга (рис. 7.5, б). Толщина листа, а следовательно, и ширина контура вихревого тока в листе мала, и индуцированные токи прямого и возвратного направлений в контуре компенсируют друг друга.

Кроме того, ослабление вихревых токов достигается увеличением удельного электрического сопротивления материала сердечников. Для этой цели в электротехническую сталь вводится присадка кремния (до 4 %).

7.2. Взаимное преобразование механической и электрической энергий в генераторах и двигателях

Устройства, с помощью которых осуществляется взаимное преобразование механической и электрической энергий, называются *электрическими машинами*. Машина для преобразования механической энергии в электрическую называется *генератором*. Машина для обратного преобразования называется *двигателем*.

Рассмотрим общие принципы взаимного преобразования механической и электрической энергий в генераторах и двигателях.

Устройство электрической машины постоянного тока. На рис. 7.6 схематично показано устройство реальной электрической машины. Электрические машины обратимы — конструкция двигателей и генераторов одинакова; различие состоит во внешней электрической цепи, подсоединяемой к клеммам электрической машины: цепь *a* — для работы в режиме генератора; цепь *b* — для работы в режиме двигателя.

На подвижной части машины, называемой *ротором* (Р), размещена обмотка, один виток которой показан на рис. 7.6. Магнитное поле создается полюсами электрической машины, которые находятся на неподвижной части машины, называемой *статором* (С). Ротор и статор выполняются из ферромагнитного материала. За счет большой относительной магнитной проницаемости мате-

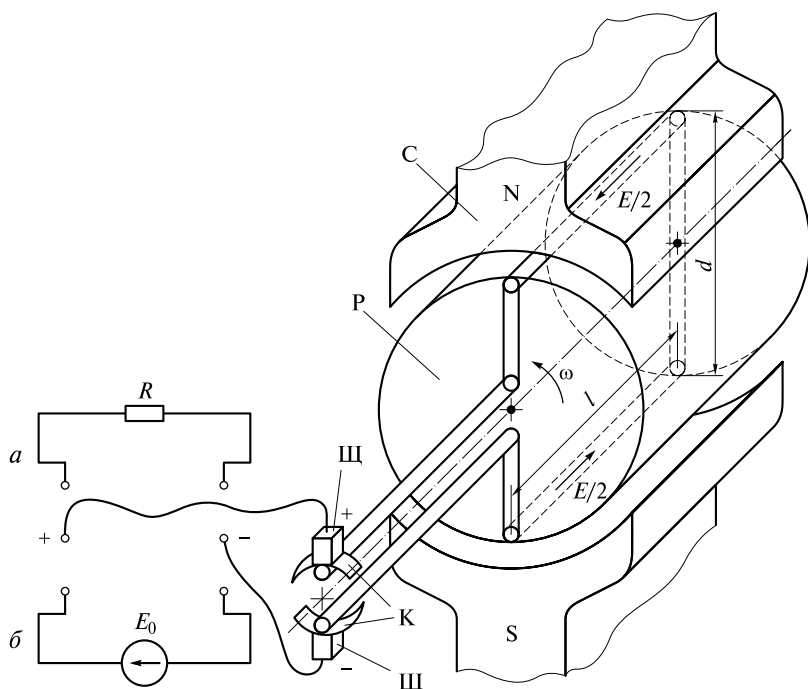


Рис. 7.6. Устройство электрической машины постоянного тока

риалов ротора и статора можно считать, что в любом месте воздушного зазора между полюсами и ротором вектор магнитной индукции перпендикулярен поверхности ротора, т.е. сторонам витка с длиной l .

Концы витка (обмотки) соединены с пластинами вращающегося *коллектора* (К) — *коллекторными пластинами*, которые скользят по неподвижным *щеткам* (Щ). Коллектор и щетки вместе предназначены для токосъема.

Работа машины в качестве генератора. Ротор вместе с обмоткой (в данном случае рассматривается один виток) вращается с постоянной угловой скоростью ω от стороннего двигателя (паровой турбины, дизельного двигателя и т.п.) в постоянном магнитном поле. Во вращающемся витке наводится ЭДС электромагнитной индукции.

ЭДС наводится только в тех сторонах витка (каждая из которых имеет длину l), которые параллельны оси вращения, так как они при вращении ротора пересекают магнитные силовые линии (под прямым углом). Эти стороны называются *активными*. В поперечных частях витка, называемых *лобовыми*, ЭДС не наводится, так как они вращаются в плоскостях, параллельных направлению силовых линий поля, и не пересекают их.

Если применить правило правой руки и определить направление наведенных ЭДС в каждой из активных сторон, то обнаружится, что ЭДС направлены вдоль проводников, но в разные стороны. Таким образом, в витке наводятся две согласно включенные ЭДС, каждая из которых равна Blv . Суммарная ЭДС на концах витка

$$E = B2lv.$$

Линейная скорость витка в последней формуле $v = \omega d/2$, где d — длина лобовой части витка, равная диаметру ротора. Таким образом, наведенная в витке ЭДС

$$E = B2l\omega d/2. \quad (7.9)$$

Если к витку через коллекторные пластины вращающегося коллектора (К) и неподвижные щетки (Щ) подключить сопротивленные нагрузки R (см. рис. 7.6, вариант a), то в витке потечет ток

$$I = \frac{E}{R + R_{\text{обм}}}.$$

В установившемся режиме при $\omega = \text{const}$ вращающий момент стороннего двигателя $M_{\text{ст}}$ уравнивается моментом электромагнитных сил M , возникающих при взаимодействии магнитного поля с током, протекающим в обмотке машины (в данном случае в витке):

$$M = 2Fd/2 = Fd = (BIl)d = BIS_{\text{вит}} = M_{\text{ст}}, \quad (7.10)$$

где $S_{\text{вит}}$ — площадь витка, $S_{\text{вит}} = ld$.

Изменение нагрузки (если сопротивление нагрузки R в течение работы генератора изменяется) влечет за собой изменение тока в витке и тормозного электромагнитного момента, что приводит к нарушению баланса моментов и изменению угловой скорости ω стороннего двигателя. Это, в свою очередь вызывает изменение ЭДС, вырабатываемой генератором, что недопустимо.

Для поддержания $\omega = \text{const}$ необходимо изменять мощность стороннего двигателя, например, за счет изменения расхода топлива (при увеличении тока увеличивать расход топлива).

Если регулировать угловую скорость невозможно, то поддержание постоянства ЭДС ($E = \text{const}$) в соответствии с формулой (7.9) обеспечивается изменением индукции магнитного поля B за счет регулирования тока обмоток возбуждения, размещенных на полюсах статора и предназначенных для создания магнитного поля.

Работа машины в режиме двигателя. В этом случае обмотка ротора через коллекторные пластины и щетки подсоединена к источнику электрической энергии, например к источнику E_0 (см. рис. 7.6, вариант b).

Под действием E_0 в витке возникает ток. Ток взаимодействует с магнитным полем полюсов, характеризующимся магнитной индукцией B . При этом возникает пара электромагнитных сил F , действующих на активные стороны витка и направленных согласно правилу левой руки в разные стороны.

Пара электромагнитных сил взаимодействия создает вращающий момент ротора M , под воздействием которого ротор начинает раскручиваться. Его угловая скорость увеличивается, пока $M > M_{\text{торм}}$, где $M_{\text{торм}}$ — суммарный тормозной (противодействующий) момент на валу двигателя всех сторонних механических сил.

При вращении ротора в магнитном поле с угловой скоростью ω в витке наводится ЭДС электромагнитной индукции, препятствующая увеличению тока в витке. При этом ток в витке уменьшается.

Двигатель перестает раскручиваться и имеет постоянную угловую скорость вращения, когда ток витка уменьшается до значения, обеспечивающего равенство вращающего момента M и противодействующего момента $M_{\text{торм}}$.

Как в случае с генератором, так и в случае с двигателем, все преобразования энергии происходят в соответствии с законом сохранения энергии. Взаимное преобразование механической и электрической энергий осуществляется в технических устройствах посредством магнитного поля за счет его электромеханического действия и электромагнитной индукции.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается явление электромагнитной индукции?
2. Что характеризует знак « \rightarrow » в формуле индуцированной ЭДС?
3. Приведите обоснование правильности показанных направлений индуцированных токов (см. рис. 7.2) с помощью закона электромагнитной индукции и правила Ленца.
4. Какова причина разделения зарядов в проводнике и образования ЭДС на его концах при движении проводника в магнитном поле?
5. Что называется ЭДС самоиндукции? От чего она зависит? Как определить ее направление?
6. Что называется ЭДС взаимной индукции? От чего она зависит? Как определить ее направление?
7. Какова природа вихревых токов? Каково влияние вихревых токов на КПД электромагнитных механизмов?
8. Приведите примеры использования вихревых токов в технике, медицине, быту.
9. Какие меры принимают в технических устройствах для уменьшения потерь энергии от вихревых токов?
10. Опишите принципы работы генератора и двигателя.

Глава 8

ПЕРЕМЕННЫЙ СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК

8.1. Основные сведения о синусоидальном электрическом токе

Переменный ток. Любой изменяющийся с течением времени электрический ток называется *переменным током*. Переменные токи могут иметь разные законы изменения. На рис. 8.1 приведены примеры таких токов.

Токи, значения которых повторяются через равные промежутки времени, называются *периодическими токами*.

Токи, значения которых изменяются по синусоидальному закону, называются *синусоидальными токами*.

В настоящее время почти вся энергия вырабатывается в виде энергии переменного тока. Постоянный ток, необходимый в некоторых областях промышленности (например, электрохимия), транспорта, связи, получается выпрямлением переменного тока. Это объясняется преимуществами переменного тока перед постоянным током.

Основное преимущество переменного тока заключается в возможности просто и с малыми потерями энергии трансформировать (преобразовывать) напряжение: получать высокое напряжение для передачи электрической энергии на большие расстояния и низкое напряжение для передачи электроэнергии на близкие расстояния и для питания приемников энергии. Кроме того, по сравнению с машинами постоянного тока генераторы и двигатели переменного тока имеют более простое устройство, надежнее в работе и проще в эксплуатации.

Синусоидальные напряжения и токи. Наибольшее распространение в современной технике получили синусоидальные напряжения и токи благодаря их замечательному свойству: *синусоидальные величины при линейных операциях (суммировании, вычитании, интегрировании, дифференцировании) остаются также синусоидальными величинами*. Таким достоинством не обладают никакие другие функции. За это важное свойство синусоидальные временные функции называются *гармоническими*, т. е. совершенными.

В линейных электрических цепях синусоидальный ток возникает под действием синусоидальных ЭДС. В современной технике синусоидальные ЭДС, а следовательно, напряжения и токи получают в электромашинных, электронных генераторах и других устройствах.

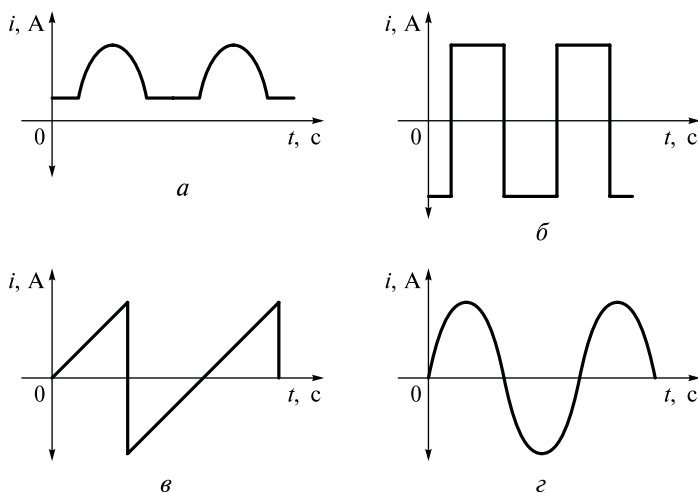


Рис. 8.1. Виды переменных сигналов:

a — изменяющихся только по величине; *б* — изменяющихся только по направлению; *в*, *г* — изменяющихся и по величине, и по направлению

Рассмотрим электромашинные генераторы. Это индукционные генераторы, т. е. машины, в которых ЭДС возникает в результате процесса электромагнитной индукции в проводнике, движущемся в магнитном поле. Таким образом, процесс, происходящий во всех промышленных электромашинных генераторах тока, — это повторение в соответствующих масштабах основного индукционного опыта Фарадея, который был рассмотрен в гл. 7.

Получение синусоидальной ЭДС при вращении рамки в равномерном магнитном поле. Синусоидальную зависимость ЭДС от времени можно получить, вращая с постоянной скоростью в равномерном магнитном поле проводник в виде прямоугольной рамки (рис. 8.2).

В каждой из активных сторон рамки длиной l наводится ЭДС, которую можно определить по формуле (7.6). Так как наведенные ЭДС действуют согласно, суммарная ЭДС

$$e = 2e_a = 2Bvl \sin \alpha, \quad (8.1)$$

где e_a — ЭДС одной из активных сторон рамки.

В дальнейшем все изменяющиеся во времени величины: токи, напряжения, ЭДС и другие — будем обозначать *строчными* буквами в отличие от постоянных значений для тех же величин, которые обозначают *прописными* буквами.

При равномерном вращении рамки линейная скорость v проводника не изменяется. Так как радиус вращения рамки $R = d/2$, то можно записать

$$v = \omega R = \omega \frac{d}{2}. \quad (8.2)$$

Угол β на рис. 8.2 определяет положение вращающейся рамки относительно плоскости, перпендикулярной направлению магнитной индукции B . Положение рамки в момент начала отсчета времени $t = 0$ характеризуется углом $\beta = 0$.

Так как угловая скорость $\omega = \beta/t$, то угол поворота рамки $\beta = \omega t$, т.е. изменяется пропорционально времени. Угол между направлением скорости и направлением магнитного поля $\alpha = \beta$, как углы с взаимно-перпендикулярными сторонами. Следовательно, угол α также изменяется пропорционально времени:

$$\alpha = \omega t. \quad (8.3)$$

Подставляя в выражение (8.1) выражения (8.2) и (8.3), убеждаемся в том, что ЭДС в рамке является синусоидальной функцией времени:

$$e = 2B\omega \frac{d}{2} l \sin \alpha = B\omega dl \sin \omega t. \quad (8.4)$$

Наибольшего значения (E_m) ЭДС достигает при угле $\alpha = \omega t = 90^\circ$:

$$E_m = B\omega dl.$$

Тогда

$$e = E_m \sin \omega t. \quad (8.5)$$

ЭДС можно изобразить в прямоугольной системе координат в зависимости от угла $\beta = \omega t$ или от времени t . Функции $e(\omega t)$ и $e(t)$

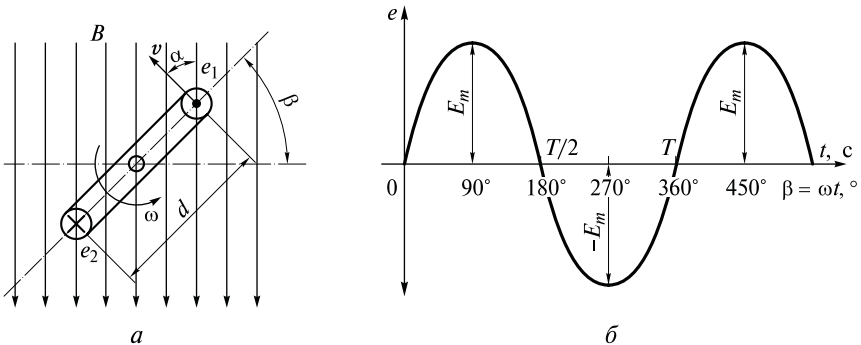


Рис. 8.2. Прямоугольная рамка в равномерном магнитном поле (а) и график синусоидальной ЭДС (б)

можно представить одной и той же кривой, но при этом они имеют разные масштабы по оси абсцисс, отличающиеся друг от друга в ω раз (рис. 8.2, б).

В рассмотренном случае синусоидальное изменение ЭДС достигается за счет непрерывного изменения угла пересечения проводниками линий магнитной индукции B . Однако такой способ получения ЭДС не нашел практического применения, так как трудно создать равномерное поле в достаточно большом объеме.

Получение синусоидальной ЭДС при вращении рамки в неравномерном магнитном поле. В электромашинных генераторах переменного тока промышленного типа угол α — угол между линиями магнитной индукции B и линейной скоростью v — при движении не изменяется ($\alpha = 90^\circ$), а изменяется индукция магнитного поля. Таким образом, магнитное поле не является равномерным. Это достигается профилированием полюсных наконечников (приданием им соответствующей формы): полюса машины выполняют так, что магнитное поле генератора становится радиальным — в воздушном зазоре между статором и ротором магнитные силовые линии направлены по радиусам окружности ротора (рис. 8.3, а).

При этом магнитная индукция вдоль воздушного зазора оказывается распределенной по закону синуса, точнее — по закону, близкому к синусоидальному (рис. 8.3, б). На рис. 8.3 по горизонтали показана развертка окружности ротора, по вертикали — значение индукции.

Таким образом, если определять положение точек воздушного зазора углом β , отсчитанным от нейтральной плоскости (*нейтральной*) против движения часовой стрелки, магнитная индукция выразится уравнением:

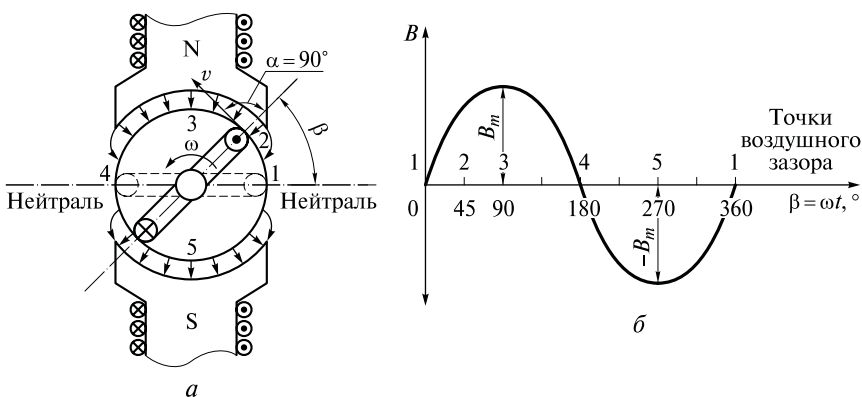


Рис. 8.3. Получение синусоидальной ЭДС при вращении ротора в неравномерном магнитном поле (а) и распределение магнитной индукции вдоль воздушного зазора электромашинного генератора (б)

$$B = B_m \sin \beta. \quad (8.6)$$

Нейтральная плоскость перпендикулярна оси полюсов и делит магнитную систему на симметричные части, из которых одна относится к северному (N), а другая к южному полюсу (S). На нейтральной (при $\beta = 0$ и $\beta = 180^\circ$) магнитная индукция $B = 0$.

Наибольшее значение B_m магнитная индукция B имеет под серединой полюсов, т. е. при углах:

$$\beta = 90^\circ \quad B = B_m; \quad \beta = 270^\circ \quad B = -B_m.$$

При равномерном вращении ротора наведенная в его обмотке ЭДС согласно формуле (7.6):

$$e = Bv2l. \quad (8.7)$$

Подставляя выражение магнитной индукции (8.6) в выражение (8.7), получим

$$e = B_m v 2l \sin \beta. \quad (8.8)$$

Наибольшая ЭДС E_m наводится в положении проводника под серединой полюса, т. е. при $\beta = 90^\circ$, так как при этом $\sin \beta$ принимает максимально возможное значение, равное 1 ($\sin 90^\circ = 1$).

При этом $E_m = B_m v 2l$. Уравнение ЭДС (8.8) можно записать в следующем виде:

$$e = E_m \sin \beta.$$

Учитывая, что $\beta = \omega t$, получаем такую же зависимость ЭДС от времени, как при вращении рамки в равномерном магнитном поле (см. рис. 8.2) при начальном положении витка ($t = 0$), когда его плоскость совпадает с нейтральной:

$$e = E_m \sin \omega t. \quad (8.9)$$

Таким образом, и в данном случае ЭДС является синусоидальной функцией времени.

Устройство генераторов переменного тока. На рис. 8.4 показано устройство генератора переменного тока с одной парой полюсов ($p = 1$, где p — число пар полюсов), укрепленных на статоре — *индукторе**. На валу закреплен ротор — *якорь* (Я), набранный из листовой стали, в пазах которого расположены витки обмотки. Концы обмотки присоединены к кольцам. Через кольца (К) и щетки (Щ) обмотка соединена с внешней цепью.

* Индуктор — часть электрической машины, предназначенная для создания магнитного поля. Якорь — часть электрической машины, предназначенная для получения ЭДС.

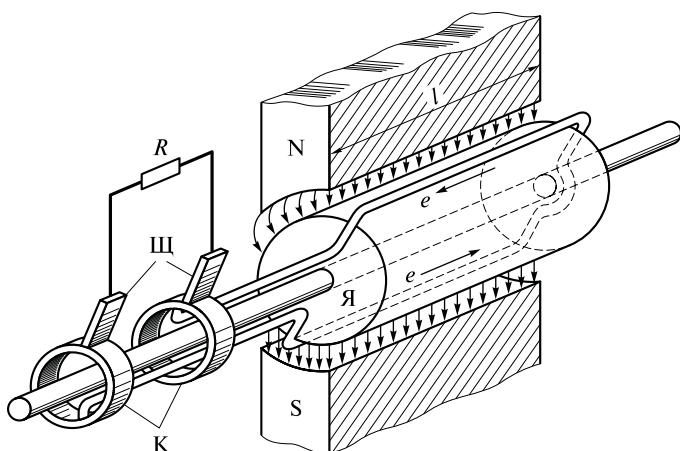


Рис. 8.4. Устройство двухполюсного генератора переменного тока

Если к этой обмотке (через кольца и щетки) подключить линейное сопротивление R , то в образовавшейся замкнутой цепи возникает синусоидальный ток, повторяющий по форме кривую ЭДС:

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m \sin \omega t}{R} = I_m \sin \omega t, \quad (8.10)$$

где I_m — наибольшее (максимальное) значение тока, $I_m = \frac{E_m}{R}$.

Рассмотренный тип генератора с вращающимся якорем применяется сравнительно редко. Чаще генераторы выполняются с неподвижным якорем (статором) и вращающимся индуктором (ротором). При неподвижной обмотке якоря повышается надежность изоляции и упрощается отвод больших токов.

Поскольку важно относительное движение проводника и магнитного поля, на концах обмотки мы получаем одинаковый результат (см. формулу (8.9)) в обоих типах электрических машин.

Основные параметры и определения переменного тока. Всякую переменную величину (например, i , u , e) можно представить в виде уравнения мгновенного значения или временного графика — волновой диаграммы.

Уравнение мгновенного значения — математическая зависимость значений переменной величины (например, i , u , e) от времени t .

Например, уравнение мгновенного значения синусоидальной ЭДС представлено выражением (8.9), синусоидального тока — выражением (8.10).

Для наглядного представления переменных величин используются их временные графики — волновые диаграммы, построенные по уравнениям мгновенных значений.

Волновая диаграмма — графическое изображение переменной величины (или совокупности переменных величин) в виде представленного в прямоугольной системе координат графика изменения ее значений от времени или от угла ωt , называемого *электрическим углом*.

Переменные величины (например, i , u , e) характеризуются рядом параметров, которые определяют вид конкретного уравнения или графика. Эти параметры (на примере величины ЭДС) показаны на графике (рис. 8.5). Основные параметры и их определения следующие.

Мгновенное значение — численное значение переменной величины (тока, напряжения, ЭДС и др.) в любой момент времени.

Мгновенное значение принято обозначать строчной буквой. Например, i — мгновенное значение тока; e — мгновенное значение ЭДС; u — мгновенное значение напряжения.

Мгновенное значение определяется уравнением, например уравнением (8.9) или (8.10) при подстановке в него времени t , прошедшего от начала отсчета до данного момента. Например, на рис. 8.5 показано мгновенное значение ЭДС e_1 в момент времени t_1 .

Амплитуда — максимальное значение переменной величины.

Амплитуда — это одно из мгновенных значений, которое наступает при значении аргумента синуса $\omega t = k\pi + 90^\circ$, где k — любое целое число или ноль.

Амплитуду обозначают прописной буквой с индексом m . Например, I_m — амплитуда тока; E_m — амплитуда ЭДС; U_m — амплитуда напряжения.

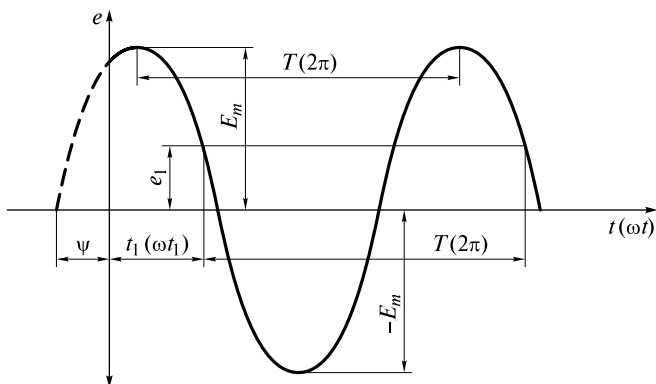


Рис. 8.5. График изменения переменной ЭДС от времени или от электрического угла

Период T — наименьший промежуток времени, требуемый для завершения одного цикла изменения мгновенных значений переменной величины, после которого они повторяются в той же последовательности (см. рис. 8.5).

В соответствии с этим для любой синусоидальной величины, например для тока i , можно записать

$$i(t) = i(t + T) = i(t + 2T) = \dots = i(t + kT),$$

где k — любое целое число.

Если аргумент синусоидальной функции выражается в углах, то период выражается постоянным значением 2π , $T = 2\pi$.

Частота f — величина, обратная периоду:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (8.11)$$

Из формулы (8.11) следует, что частота равна числу периодов переменной величины в секунду. Частота измеряется в герцах, Гц:

$$1 \text{ Гц} = 1 \frac{1}{\text{с}}.$$

При средней и высокой частотах пользуются кратными единицами: *килогерцы*, кГц, и *мегагерцы*, МГц:

$$1 \text{ кГц} = 1 \cdot 10^3 \text{ Гц}; \quad 1 \text{ МГц} = 1 \cdot 10^6 \text{ Гц}.$$

В современной технике используется широкий диапазон частот электрических сигналов — от сотых долей герца до миллиардов герц. В электроэнергетике в России и Европе стандартной частотой является 50 Гц, в США — 60 Гц. Для питания аппаратуры транспортных средств (самолетов, автомобилей, судов, тепловозов и др.) используются синусоидальные токи с частотой 400, 500, ..., 1 000 Гц. Во многих областях техники используются периодические электрические сигналы в звуковом диапазоне $50 \dots 10^5$ Гц. В радиотехнике, телевидении, связи, системах управления используются периодические сигналы с частотой до 10^{10} Гц.

Начальная фаза ψ — значение аргумента синуса в уравнении мгновенного значения периодической величины в начальный момент времени ($t = 0$).

На рис. 8.6, *a* изображена схема электрической машины с тремя витками (I—I, II—II и III—III) на роторе, положение которых зафиксировано в момент времени $t = 0$. Плоскости витков находятся под некоторыми углами друг к другу. В момент времени $t = 0$ положение каждого витка определяется углом, отсчитанным от нейтрали до плоскости витка *против часовой стрелки*. Для витка I—I этот угол $\psi_1 = 0$, для витка II—II — угол $\psi_2 > 0$ и для

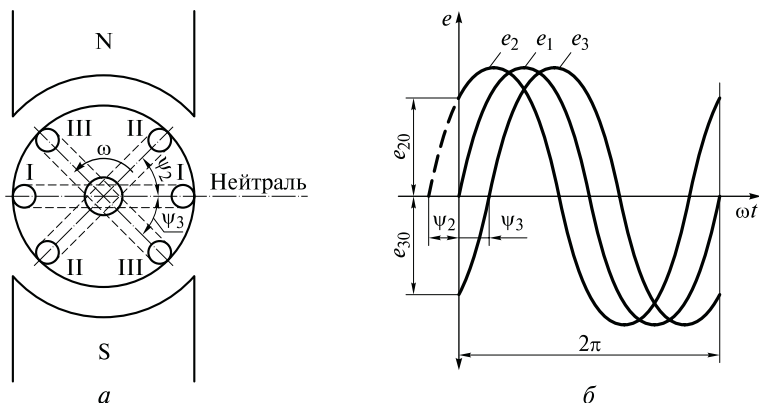


Рис. 8.6. Схема генератора переменного тока с тремя витками на роторе (а) и графики сдвинутых по фазе синусоидальных ЭДС (б)

витка III—III — угол $\psi_3 < 0$. Эти углы и являются начальными фазами.

Уравнение мгновенного значения наведенной ЭДС. В начальный момент времени ($t = 0$) при вращении ротора уравнения ЭДС, наводимых в витках (см. рис. 8.6), имеют вид:

$$e_{10} = E_m \sin \psi_1 = 0 \quad (\text{в витке I—I}); \quad e_{20} = E_m \sin \psi_2 > 0 \quad (\text{в витке II—II}); \\ e_{30} = E_m \sin \psi_3 < 0 \quad (\text{в витке III—III}). \quad (8.12)$$

Витки расположены на одном роторе и имеют общее магнитное поле. Поэтому согласно формуле (8.8) амплитуда у всех ЭДС одинакова, но мгновенные значения ЭДС (e_{10} , e_{20} , e_{30}) разные из-за различия начальных фаз (ψ_1 , ψ_2 и ψ_3).

При $t > 0$ к начальной фазе каждого витка добавляется электрический угол, пропорциональный времени движения, и наведенные ЭДС будут выражаться следующими уравнениями:

$$e_1 = E_m \sin(\omega t + \psi_1); \quad e_2 = E_m \sin(\omega t + \psi_2); \\ e_3 = E_m \sin(\omega t + \psi_3).$$

Таким образом, в общем виде для любого витка обмотки можно записать уравнение мгновенного значения наведенной ЭДС:

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi), \quad (8.13)$$

где ψ — начальная фаза наведенной ЭДС, которая может принимать положительные, нулевые и отрицательные значения.

Фаза (фазовый угол) — значение аргумента синуса в уравнении мгновенного значения переменной величины в любой момент времени.

В общем виде фаза

$$\beta = \omega t + \psi. \quad (8.14)$$

Сдвиг фазового угла (фазовый сдвиг, сдвиг фаз). Любые две синусоидальные величины, имеющие разные начальные фазы, называются *сдвинутыми по фазе*.

Сдвиг фазового угла φ равен абсолютному значению разности начальных фаз сравниваемых синусоидальных величин:

$$\varphi = |\psi_{i+1} - \psi_i|, \quad (8.15)$$

где i — порядковый номер сравниваемой величины.

На рис. 8.6, б в соответствии с уравнением (8.15) построены графики ЭДС трех витков, отличающихся расположением относительно нейтральной плоскости в момент отсчета времени (см. рис. 8.6, а). Таким образом, каждая из представленных на графике синусоидальных ЭДС сдвинута относительно остальных ЭДС по фазе.

Например, при $\psi_1 = 0$; $\psi_2 = 45^\circ$ и $\psi_3 = -45^\circ$ сдвиги фаз:

$$\varphi_{12} = |\psi_1 - \psi_2| = |0 - 45^\circ| = 45^\circ; \quad \varphi_{13} = |\psi_1 - \psi_3| = |0 - (-45^\circ)| = 45^\circ;$$

$$\varphi_{23} = |\psi_2 - \psi_3| = |45^\circ - (-45^\circ)| = 90^\circ.$$

Одна из двух сдвинутых по фазе синусоидальных величин опережает по фазе другую, если она проходит через нулевое значение к положительному значению по времени раньше, чем другая. В противном случае она отстает по фазе от другой синусоидальной величины.

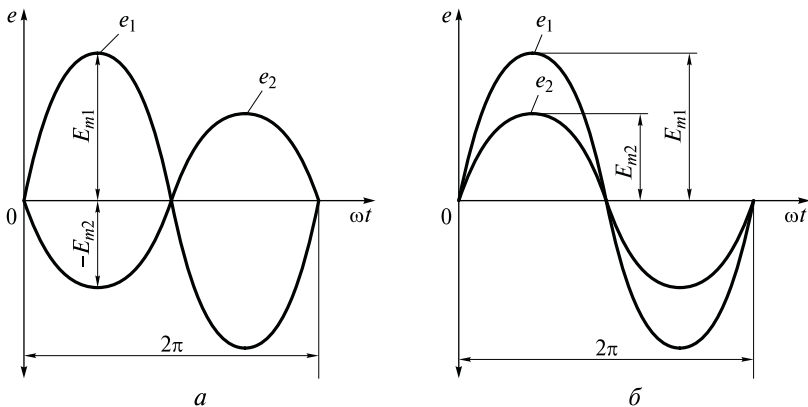


Рис. 8.7. Синусоидальные ЭДС:

а — находящиеся в противофазе; б — совпадающие по фазе

Например, на рис. 8.6, б ЭДС e_2 опережает по фазе e_1 и e_3 на углы соответственно φ_{12} и φ_{23} (e_1 и e_3 соответственно отстают от e_2 на те же углы); e_1 опережает по фазе e_3 на угол φ_{13} .

Если одна синусоидальная величина опережает другую на пол-периода, то говорят, что эти величины находятся в противофазе.

Например, ЭДС $e_1 = E_{m1}\sin\omega t$ и $e_2 = E_{m2}\sin(\omega t \pm \pi)$ (рис. 8.7, а) находятся в противофазе.

Если синусоидальные величины принимают нулевые и максимальные значения в одни и те же моменты времени, то говорят, что эти величины совпадают по фазе (рис. 8.7, б).

Угловая частота ω — скорость изменения фазового угла.

За время одного периода T фазовый угол равномерно изменяется на угол 2π радиан (рад), поэтому

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (8.16)$$

или с учетом формулы (8.11)

$$\omega = 2\pi f. \quad (8.17)$$

Единица измерения угловой частоты

$$[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}.$$

8.2. Векторные диаграммы

Изображение синусоидальной величины с помощью вращающегося вектора. Существует два способа графического изображения синусоидальной величины. Один из них — с помощью волновой диаграммы — мы использовали для наглядности при описании основных параметров синусоидальных переменных токов в подразд. 8.1. Второй способ — с помощью вектора — широко применяют при расчетах электрических цепей переменного тока.

Основное достоинство этого графического способа — простота изображения. Синусоидальная величина изображается вектором. Кроме того, его применение значительно упрощает графическое определение суммы или разности нескольких синусоидальных величин, так как позволяет заменить трудоемкую работу сложения мгновенных значений для ряда моментов времени простой операцией сложения векторов.

Особенности векторного изображения синусоидальных величин:

- синусоидальная величина изображается вектором, выходящим из начала координат прямоугольной системы;
- длина вектора в выбранном масштабе равна амплитудному значению синусоидальной величины (например, E_m);
- вектор изображается в начальный момент времени ($t = 0$), т. е. под углом начальной фазы ψ синусоидальной величины к положительному направлению оси абсцисс x . Положительные углы откладываются против направления движения часовой стрелки, отрицательные углы — по направлению движения часовой стрелки;
- предполагается, что вектор вращается с угловой скоростью, равной угловой скорости ω синусоидальной величины, против направления движения часовой стрелки.

Правомерность изображения синусоидальной величины с помощью вращающегося вектора. Пусть синусоидальный ток задан уравнением мгновенного значения в общем виде:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Проведем две взаимно-перпендикулярные оси. Из точки пересечения осей проведем вектор, длина которого в определенном масштабе M_i равна амплитуде тока I_m .

Направление вектора выберем таким образом, чтобы с положительным направлением горизонтальной оси вектор составлял угол, равный начальной фазе ψ (рис. 8.8).

Проекция этого вектора (I_m) на вертикальную ось равна $I_m \sin \psi$, т. е. равна мгновенному значению тока в начальный момент времени:

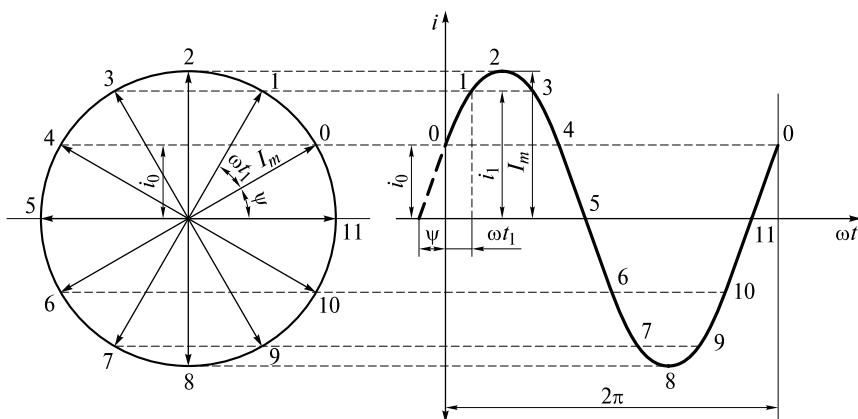


Рис. 8.8. Построение графика синусоидального тока с помощью вращающегося вектора

$$I_m \sin \psi = i_0.$$

Представим себе, что вектор I_m вращается против движения часовой стрелки с угловой скоростью, равной угловой частоте ω . Его положение в любой момент времени t определяется углом $\beta = \omega t + \psi$.

Например, для $t = t_1$ угол поворота вектора $\beta = \omega t_1 + \psi$. Проекция вектора на вертикальную ось $I_m \sin(\omega t_1 + \psi)$, т.е. так же, как и для начального момента времени, оказывается равной мгновенному значению тока в заданный момент времени (t_1):

$$I_m \sin(\omega t_1 + \psi) = i_1.$$

В общем случае для любого произвольного момента времени t проекция вектора I_m на вертикальную ось оказывается равной мгновенному значению тока в заданный момент времени.

Следовательно, мгновенное значение тока в любой момент времени t можно определить как проекцию вектора I_m на вертикальную ось в данный момент времени:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Полученное уравнение полностью соответствует уравнению заданного переменного тока.

Вращающийся вектор, изображенный с соблюдением перечисленных ранее особенностей, отображает всю информацию о заданной синусоидальной величине. Это свидетельствует о правомерности рассмотренного способа изображения синусоидальной величины.

Построение графика синусоидальной величины с помощью вращающегося вектора. Мгновенное значение синусоидальной величины в любой момент времени t можно определить как проекцию на ось ординат вращающегося вектора, изображающего синусоидальную величину. Поэтому, построив в прямоугольной системе координат график изменения проекции вектора на вертикальную ось от угла поворота вектора при его вращении против движения часовой стрелки в пределах одного оборота (одного периода), мы получим известный уже график синусоидальной функции, соответствующий заданному уравнению (см. рис. 8.8).

Векторная диаграмма. При расчете электрической цепи обычно рассматривают взаимосвязь разных синусоидальных величин. В этом случае отображающие их вращающиеся векторы удобно изображать на одном чертеже, в одной системе взаимно-перпендикулярных осей.

Совокупность векторов, изображающих на одном чертеже несколько синусоидальных величин одинаковой частоты в начальный момент времени, называется *векторной диаграммой*.

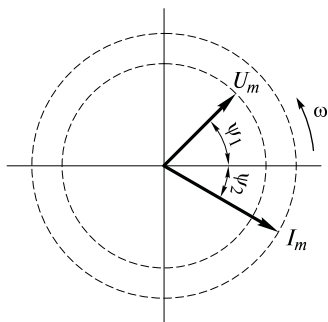


Рис. 8.9. Векторная диаграмма напряжения и тока в электрической цепи

Так, например, на рис. 8.9 представлена векторная диаграмма напряжения и тока в электрической цепи, уравнения которых заданы в общем виде:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_1); i = I_m \sin(\omega t + \psi_2).$$

Так как векторная диаграмма содержит векторы синусоидальных величин только одинаковой частоты, то векторы вращаются с одинаковой скоростью ω и их взаимное расположение, т.е. угол сдвига фаз между векторами, в любой момент времени остается неизменным:

$$\varphi = |\psi_1 - \psi_2| = \psi_1 - \psi_2 = \text{const.}$$

При изображении векторной диаграммы начало отсчета времени (направление оси x) можно изобразить произвольно, например по горизонтали; затем один из векторов диаграммы совместить с положительным направлением оси абсцисс x , а оси координат опустить; остальные векторы необходимо располагать с учетом сдвига фаз по отношению друг к другу.

Простота и наглядность векторных диаграмм — не единственное достоинство этого способа изображения синусоидальных величин. Главное достоинство векторного способа — простота графического определения суммы или разности нескольких синусоидальных величин.

Рассмотрим для сравнения разные возможные способы сложения синусоидальных величин.

Сложение синусоидальных величин с помощью математических преобразований. Например, требуется найти суммарный ток двух токов, заданных уравнениями:

$$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1); i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_2).$$

При отличающихся значениях I_{m1} и I_{m2} выражение суммы синусоид

$$i = i_1 + i_2 = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{m2} \sin(\omega t + \psi_2)$$

достаточно сложно привести к виду

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

с помощью математических преобразований.

Сложение синусоидальных величин с помощью волновой диаграммы. Значения амплитуды и начальной фазы суммарной синусоидальной величины можно определить графически с помощью волновой диаграммы.

Для этого заданные синусоидальные величины требуется построить в одной системе координат. Для ряда значений аргумента (времени или угла) в пределах периода найти суммы ординат заданных величин. Если через полученные точки провести кривую, можно убедиться в том, что суммарная кривая также является синусоидой с таким же периодом, как и слагаемые. По построенной кривой можно найти и амплитуду, и начальную фазу суммарной синусоидальной величины.

На рис. 8.10 представлен результат сложения двух синусоидальных токов описанным способом. Например, для момента времени $t = m_t Oa$ (m_t , с/мм, — масштаб по оси времени; Oa , мм, — отрезок, соответствующий углу ωt в масштабе $m_{\omega t} = m_t \omega$ от начала отсчета), ордината суммарной кривой: $a\gamma = a\delta + a\epsilon$.

Однако такое решение проблемы сложения синусоидальных величин имеет серьезный недостаток: достаточно точное построение суммарной кривой трудоемко, оно требует значительной затраты времени.

Сложение синусоидальных величин с помощью векторных диаграмм. Очень просто сложение и вычитание синусоидальных величин осуществляется по правилам сложения и вычитания векторов. При этом вектор, равный геометрической

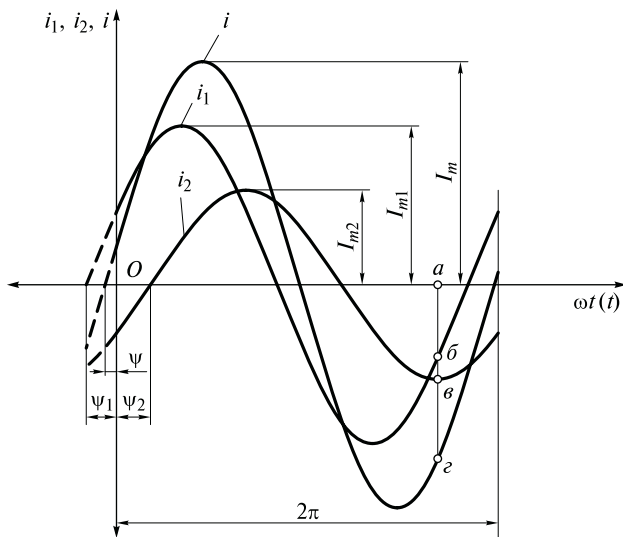


Рис. 8.10. Сложение графиков двух синусоидальных величин

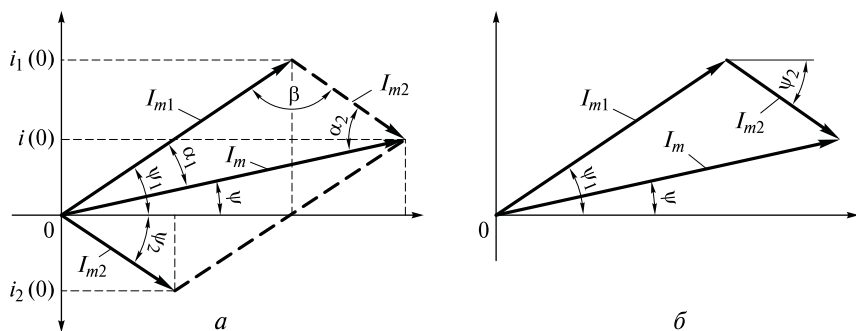


Рис. 8.11. Сложение двух векторных величин:

a — по правилу параллелограмма; *б* — способом параллельного переноса векторов

сумме векторов, представляющих слагаемые синусоиды, отображает результирующую синусоиду в нулевой момент времени.

Пусть два синусоидальных тока i_1 и i_2 , имеющих одинаковую угловую частоту ω , заданы векторами на векторной диаграмме (рис. 8.11, *a*). Для сложения заданных токов i_1 и i_2 воспользуемся известным правилом сложения векторов — *правилом параллелограмма*: результирующий вектор \bar{I}_m определим как диагональ параллелограмма, построенного на слагаемых векторах \bar{I}_{m1} и \bar{I}_{m2} .

Из рис. 8.11, *a* видно, что проекция результирующего вектора на ось ординат, отображающая мгновенное значение суммарного тока в нулевой момент времени $i(0)$, совпадает с алгебраической суммой проекций векторов слагаемых токов на ось ординат, которые отображают их мгновенные значения в нулевой момент времени:

$$i(0) = i_1(0) - i_2(0).$$

Это справедливо и для любого другого момента времени, так как взаимное расположение векторов при их вращении не изменяется и для их проекций в любой момент времени выполняется равенство: проекция суммарного вектора равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов.

Таким образом, при сложении синусоидальных величин одной частоты получается синусоидальная величина той же частоты, амплитуда которой равна геометрической сумме амплитуд слагаемых величин.

После построения суммарного вектора легко определить параметры суммарной величины: амплитуду и начальную фазу. Если нас устраивает точность графического расчета, то для определения амплитуды суммарной величины достаточно длину суммарного вектора умножить на масштаб, выбранный для построения

векторной диаграммы. Начальную фазу можно измерить транспортиром или определить по одной из тригонометрических функций.

Расчет параметров результирующей синусоиды с математической точностью. Векторный способ сложения векторов позволяет с математической точностью определить параметры суммарной синусоиды.

Рассмотрим пример определения параметров (I_m и ψ) суммы двух токов i_1 и i_2 (см. рис. 8.11, *a*).

Амплитуда I_m суммарного тока определяется, например, по известной из тригонометрии теореме косинусов. Так как вектор суммы токов является одной из сторон треугольника со сторонами I_{m1} , I_{m2} , I_m , то можно записать

$$I_m = \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 - 2I_{m1}I_{m2} \cos \beta},$$

где угол $\beta = 180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2$.

Так как $\alpha_1 = \psi_1 - \psi$; $\alpha_2 = \psi_2 + \psi$, то угол $\beta = 180^\circ - \psi_1 + \psi - \psi_2 - \psi = 180^\circ - (\psi_1 + \psi_2)$.

Так как сумма углов $\psi_1 + \psi_2$ равна углу сдвига фаз ϕ_{12} между векторами I_{m1} и I_{m2} , то угол $\beta = 180^\circ - \phi_{12}$ и $\cos \beta = \cos(180^\circ - \phi_{12})$.

Поскольку $\cos(180^\circ - \phi_{12}) = -\cos \phi_{12}$, то амплитуда I_m суммарного тока

$$I_m = \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + 2I_{m1}I_{m2} \cos \phi_{12}}, \quad (8.18)$$

где угол ϕ_{12} — угол сдвига фаз между векторами I_{m1} и I_{m2} .

Начальная фаза суммарного тока ψ определяется по ее тангенсу (см. рис. 8.11, *a*):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{I_{m1} \sin \psi_1 - I_{m2} \sin \psi_2}{I_{m1} \cos \psi_1 + I_{m2} \cos \psi_2}. \quad (8.19)$$

Уравнение мгновенного значения суммарного тока:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Способы сложения векторов. Мы рассмотрели сложение синусоид по правилу параллелограмма (см. рис. 8.11, *a*). Поскольку противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны друг другу, мы получим тот же результат, если из конца вектора I_{m1} построим вектор, равный и параллельный вектору I_{m2} , а результирующий вектор I_m проведем из начала координат в конец второго вектора (рис. 8.11, *б*). Это более удобный способ, требующий меньшее число линий построения, особенно для трех и более векторов.

Таким образом, сложение векторов удобнее выполнять следующим образом:

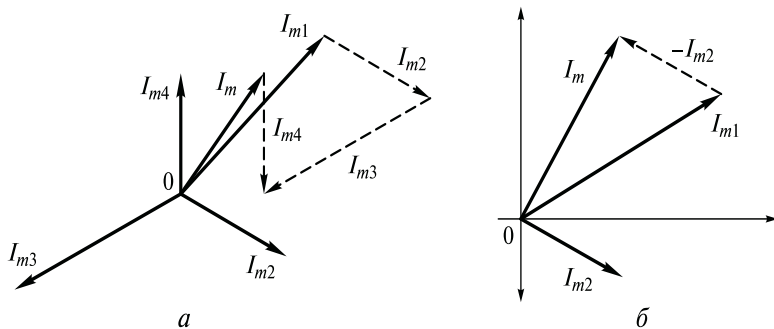


Рис. 8.12. Сложение нескольких векторов (а) и вычитание векторов (б)

- построить один вектор;
- другие перенести один за другим параллельно самим себе в конец предыдущего вектора (таким образом, начало каждого следующего вектора будет совпадать с концом предыдущего);
- провести вектор из начала первого в конец последнего вектора.

Вектор, проведенный из начала первого вектора в конец последнего вектора, представляет собой сумму всех векторов. Например, на рис. 8.12, а таким способом построен вектор, отображающий результат сложения четырех синусоидальных токов.

Вычитание синусоидальных величин с помощью векторных диаграмм. Этот способ представляет собой сложение уменьшаемого вектора и вектора, обратного вычитаемому, т. е. равного по величине и противоположно направленного. Например, на рис. 8.12, б представлено вычитание двух токов: $i = i_1 - i_2$.

На рис. 8.13 представлены отдельные часто встречающиеся случаи сложения синусоидальных величин:

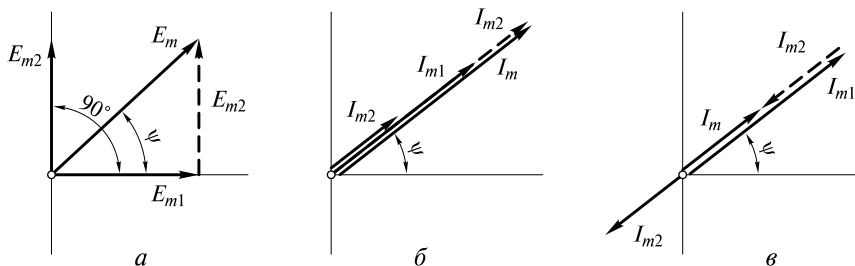


Рис. 8.13. Частные случаи сложения векторов:

а — сдвинутых по фазе на 90° ; б — совпадающих по фазе; в — находящихся в противофазе

сдвинутых по фазе на 90° (*a*); совпадающих по фазе (*b*); находящихся в противофазе (*в*).

Сложение двух синусоидальных величин различной частоты. У складываемых синусоидальных величин различной частоты угол сдвига фаз, характеризующий их взаимное расположение, не остается постоянным, а изменяется с течением времени. Поэтому их нельзя складывать с помощью векторной диаграммы. Сумму таких синусоид определяют с помощью волновой диаграммы и при этом получают несинусоидальную переменную величину.

8.3. Среднее и действующее значения синусоидальной величины

Уравнения мгновенных значений переменных синусоидальных электрических величин (ЭДС, токов, напряжений и др.) и их графические представления (диаграммы) содержат полную информацию о переменных величинах. Однако на практике при расчетах электрических цепей использование уравнений или диаграмм вызывает определенные затруднения. В электротехнике для характеристики переменных электрических величин введены еще два понятия: среднее и действующее (эффективное) значения.

Среднее значение синусоидальной величины. Среднее значение переменного синусоидального тока I_{cp} равно такому значению постоянного тока, при котором в течение полупериода через поперечное сечение проводника проходит такое же количество электричества (такой же заряд Q), что и при переменном токе. Чтобы подчеркнуть эквивалентность среднего значения переменного тока некоторому постоянному току, его обозначают прописной буквой, как принято для постоянного тока.

При постоянном токе (см. формулу (2.1)):

$$I_{cp} = \frac{Q}{T/2} = \frac{2}{T} Q, \quad (8.20)$$

таким образом количество электричества, проходящее через поперечное сечение за время $T/2$ составит $Q = I_{cp} T/2$, т.е. будет равно площади прямоугольника с высотой I_{cp} и основанием $T/2$ (рис. 8.14, *a*).

Среднее значение переменного тока вычисляют за полупериод, в течение которого направление тока не изменяется. Такое же количество электричества Q за полупериод при прохождении переменного тока можно представить графически площадью S , ограниченной осью абсцисс и кривой тока от начала до половины

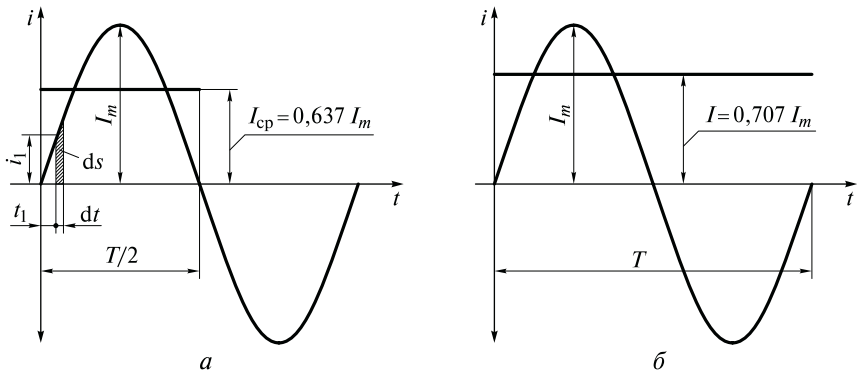


Рис. 8.14. Среднее значение тока за полупериод (а) и действующее значение тока за период (б)

периода (см. рис. 8.14, а). Для определения площади S нужно разбить эту площадь на элементарные площадки ds (одна из площадок ds показана для примера на рис. 8.14, а при некотором времени t_1 и мгновенном значении тока i_1).

При малом приращении времени ($dt \approx 0$) значение тока i можно считать постоянным в течение времени dt . Тогда для любого момента времени t площадь элементарной площадки ds может быть представлена выражением $ds = i dt = I_m \sin \omega t dt$. При этом количество электричества Q за полупериод при переменном токе может быть представлено как сумма всех элементарных площадок ds , на которые была разбита площадь S :

$$Q = S = \int_0^{T/2} ds = \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = -\frac{I_m}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^{T/2}.$$

Так как $\cos(\omega T/2) = \cos(2\pi/2) = -1$, а $\cos 0 = 1$, то

$$Q = -\frac{I_m}{\omega} (-1 - 1) = \frac{2I_m}{\omega}. \quad (8.21)$$

Подставив выражение (8.21) в выражение (8.20) и учитывая, что $\omega = 2\pi/T$, получим

$$I_{\text{cp}} = \frac{2}{T} Q = \frac{2}{T} \frac{2I_m T}{2\pi} = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m. \quad (8.22)$$

Аналогично определяются средние значения за полупериод для синусоидальных напряжения и ЭДС:

$$U_{\text{cp}} = \frac{2}{\pi} U_m \approx 0,637 U_m \text{ и } E_{\text{cp}} = \frac{2}{\pi} E_m \approx 0,637 E_m. \quad (8.23)$$

Очевидно, что среднее значение синусоидальной величины (тока, напряжения, ЭДС) за период равно нулю.

Действующее значение синусоидальной величины. При расчете цепей переменного тока и их экспериментальном исследовании чаще всего пользуются понятием действующего значения синусоидальной величины: тока, напряжения, ЭДС.

При определении действующего значения переменного тока в практической электротехнике принято сравнивать *тепловое действие переменного и постоянного токов*. В связи с этим действующие значения переменных величин обозначаются, как и средние, прописными буквами, но без индексов: I — ток, U — напряжение, E — ЭДС.

Действующее значение переменного тока I численно равно значению такого эквивалентного постоянного тока, который в одном и том же элементе цепи за время, равное периоду T , выделяет столько же теплоты Q , сколько при тех же условиях выделяет переменный ток.

Действующее значение переменного тока, безусловно, меньше амплитуды I_m (горизонтальная прямая на рис. 8.14, б). Выведем соотношение действующего значения переменного тока I с амплитудой I_m . Выразим количество теплоты Q , выделяемого в элементе цепи с сопротивлением R за время, равное периоду T , при протекании постоянного тока I и переменного тока $i = I_m \sin \omega t$.

При постоянном токе $Q = RI^2 T$. Количество теплоты dQ , выделенное в сопротивлении R переменным током за бесконечно малый промежуток времени dt , $dQ = Ri^2 dt$.

За период T переменного тока количество выделенной им теплоты

$$Q = \int_0^T dQ = \int_0^T Ri^2 dt.$$

Приравняв Q и Q , получим

$$RI^2 T = \int_0^T Ri^2 dt,$$

откуда действующее значение переменного тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (8.24)$$

Для определения действующего значения тока подставим в формулу (8.24) выражение синусоидального тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt}.$$

Из тригонометрии известно, что $\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$.

Поэтому

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{I_m^2}{2} \left(\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt \right)}. \quad (8.25)$$

Так как

$$\left(\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt \right) = t \Big|_0^T - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \Big|_0^T = T - \frac{\sin 2\omega T - \sin 0}{2\omega} = T,$$

то

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{I_m^2}{2} T} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m. \quad (8.26)$$

Таким образом, действующее значение синусоидального тока меньше его амплитуды в $\sqrt{2}$ раз.

Для действующих значений синусоидальных напряжений и ЭДС справедливы аналогичные соотношения:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0,707 E_m. \quad (8.27)$$

Введя понятие о действующем значении, векторные диаграммы в дальнейшем будем строить для действующих значений ЭДС, напряжений и токов. Так как действующие значения пропорциональны амплитудам, то все соотношения на векторной диаграмме при этом сохраняются.

Номинальные токи, напряжения и ЭДС электротехнических устройств (измеренные соответствующими электроизмерительными приборами или вычисленные) выражаются действующими значениями.

Коэффициенты амплитуды и формы периодической переменной величины. Отношение амплитуды к действующему значению называется *коэффициентом амплитуды*:

$$K_a = \frac{I_m}{I}. \quad (8.28)$$

Для синусоидальной функции $K_a = \sqrt{2}$, для других периодических кривых K_a имеет другие значения. Если кривая тока или

напряжения имеет более острую форму, чем синусоида, то $K_a > \sqrt{2}$. В противном случае $K_a < \sqrt{2}$. При прямоугольной форме периодических кривых $K_a = 1$.

Отношение действующего значения к среднему называется *коэффициентом формы кривой*:

$$K_{\Phi} = \frac{I}{I_{\text{cp}}}. \quad (8.29)$$

Для синусоиды

$$K_{\Phi} = \frac{I}{I_{\text{cp}}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2I_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11.$$

Контрольные вопросы

1. Какой ток называется переменным? Как можно получить синусоидальный электрический ток?

2. Какой вид имеет уравнение мгновенного значения синусоидального тока?

3. Чему равны период и угловая частота синусоидального тока при частоте 50 Гц?

4. Синусоидальный ток имеет следующие характеристики: максимальное значение тока — 5 А; угловая частота — 314 рад/с; начальная фаза — 30° . Составьте уравнение мгновенного значения синусоидального тока и начертите соответствующий уравнению график тока. Определите период, частоту и мгновенные значения тока (при $\omega t = 0$; $\omega t = 30^\circ$; $\omega t = 60^\circ$).

5. Чему равен временной сдвиг двух синусоидальных токов, изменяющихся с частотой 50 Гц, если ему соответствует фазовый сдвиг в 90° ?

6. Сформулируйте особенности векторного изображения синусоидальной величины. Докажите правомерность изображения синусоидальной величины с помощью вращающегося вектора.

7. Что такое векторная диаграмма? Как выбирают начало отсчета времени при изображении векторной диаграммы?

8. Какие способы применяют для сложения синусоидальных величин? Какой способ является наиболее удобным?

9. Как определить разность синусоидальных величин?

10. Почему на одной векторной диаграмме не изображаются синусоидальные величины, имеющие разные частоты?

11. Что представляет собой среднее значение переменного тока? Почему среднее значение синусоидального тока за период равно нулю?

12. Как связано среднее значение синусоидальной величины с ее амплитудой?

13. Что представляет собой действующее значение переменного тока? Почему это значение определяют за время, равное периоду?

14. Какова связь действующего значения синусоидальной величины и ее амплитуды?

15. Что представляют собой характеристики: коэффициент амплитуды и коэффициент формы? Каково их назначение?

Глава 9

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

9.1. Цепь с активным сопротивлением

Особенности электрических цепей переменного тока. Электрическая цепь переменного тока характеризуется тремя основными параметрами: сопротивлением R , индуктивностью L и емкостью C . Реальные электротехнические устройства обладают всеми указанными параметрами. Однако часто в тех или иных устройствах преобладающее влияние на ток оказывают отдельные параметры при незначительном влиянии остальных. В этих случаях из расчетной схемы электрической цепи исключаются те параметры, влиянием которых можно пренебречь.

Расчет цепи с преобладанием сопротивления R . Такие устройства, в которых учитывается только сопротивление R , представляют собой схему замещения, изображенную на рис. 9.1, а.

Если для цепи (см. рис. 9.1, а) задано сопротивление R и напряжение, изменяющееся по закону $u = U_m \sin \omega t$, расчет цепи заключается в определении в ней тока и мощности.

Ток в цепи с сопротивлением R . Для цепи с сопротивлением R ток определяется по закону Ома в мгновенных значениях:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t, \quad (9.1)$$

где I_m — амплитуда синусоидального тока.

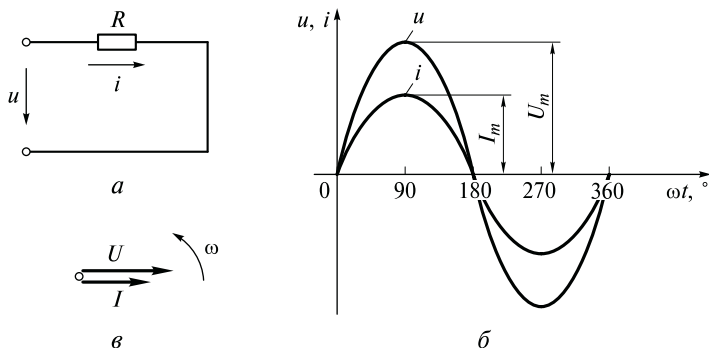


Рис. 9.1. Цепь с активным сопротивлением:

а — схема замещения; б — волновая диаграмма; в — векторная диаграмма

Амплитуду синусоидального тока получим из выражения

$$I_m = \frac{U_m}{R}. \quad (9.2)$$

Выражение (9.2) называют законом Ома в амплитудных значениях для цепи с сопротивлением R .

Из уравнений напряжения и тока рассматриваемой цепи видно, что начальные фазы обеих кривых одинаковы, т.е. напряжение и ток в цепи с сопротивлением R совпадают по фазе. Это наглядно представлено на волновой и векторной диаграммах (рис. 9.1, б и в).

Разделив выражение (9.2) на $\sqrt{2}$, получим:

$$\frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}R},$$

или

$$I = \frac{U}{R}; \quad U = IR. \quad (9.3)$$

Выражения (9.3) представляют собою закон Ома в цепи с сопротивлением R в действующих значениях.

Закон Ома для действующих значений (см. формулу (9.3)) внешне ничем не отличается от формулы (2.5) для цепи постоянного тока. Однако необходимо помнить, что в формулы для цепи переменного тока входят *действующие значения напряжения и тока*.

Мгновенная мощность цепи с сопротивлением R . Мощность участка цепи переменного тока с сопротивлением R определяется так же, как и в цепях постоянного тока. Согласно формуле (2.25) мощность потребителя — это произведение напряжения на участке с сопротивлением на величину тока, протекающего по этому участку. Особенность цепи переменного тока заключается в том, что формула (2.25) справедлива для мгновенных значений напряжения u и тока i .

Таким образом, мгновенное значение мощности (мгновенная мощность)

$$p = ui = Ri^2. \quad (9.4)$$

В цепи с сопротивлением R мгновенная мощность показывает скорость преобразования электрической энергии в тепловую.

Например, в какой-то момент времени t_1 напряжение $u_1 = 9$ В, а ток $i_1 = 0,02$ А. Мгновенная мощность при этом

$$p_1 = u_1 i_1 = 9 \cdot 0,02 = 0,18 \text{ Вт.}$$

Это означает, что в момент времени t_1 электрическая энергия превращается в теплоту со скоростью 0,18 Дж/с.

Подставляя мгновенные значения напряжения и тока в формулу (9.4), получим уравнение мгновенной мощности

$$p = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t. \quad (9.5)$$

Приняв во внимание выражения (8.26) и (8.27), получим уравнение мгновенной мощности в действующих значениях:

$$p = 2UI \sin^2 \omega t. \quad (9.6)$$

Подставив в выражение (9.6) известные из тригонометрии формулы:

$$\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \quad \text{и} \quad -\cos 2\omega t = \sin(2\omega t - 90^\circ),$$

получим

$$p = UI + UI \sin(2\omega t - 90^\circ). \quad (9.7)$$

Для наглядного представления о характере изменения мощности в цепи построим график изменения мгновенной мощности p от времени t в прямоугольной системе координат (рис. 9.2).

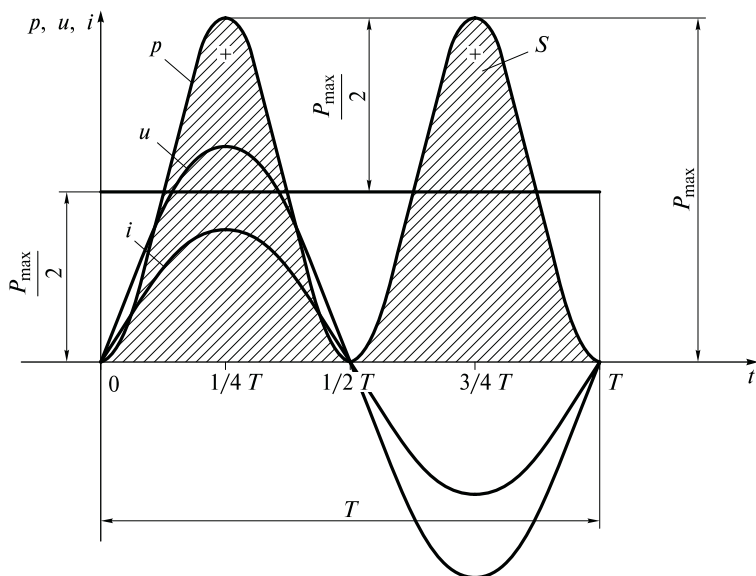


Рис. 9.2. График мгновенной мощности в цепи с активным сопротивлением

Зависимость мгновенной мощности от времени — периодическая кривая. Максимальное значение P_{\max} мгновенной мощности p равно сумме постоянной составляющей (UI) и равной ей амплитуды синусоидальной составляющей (см. выражение (9.7))

$$P_{\max} = 2UI. \quad (9.8)$$

Анализируя график мгновенной мощности, нетрудно заметить, что мощность в течение периода T остается положительной, хотя ток и напряжение изменяют свой знак. Это объясняется тем, что мгновенная мощность p равна произведению величин u и i , совпадающих по фазе: обе величины (u и i) одновременно положительны или отрицательны. Следовательно, их произведение (p) положительно в любом случае, независимо от знака множителей.

Постоянство знака мощности говорит о том, что направление потока электрической энергии остается в течение периода неизменным, от источника энергии (например, от сети) в приемник, где электрическая энергия необратимо преобразуется в другой вид энергии: тепловую (в резисторах), световую (в лампах накаливания), механическую (в электродвигателях), химическую (при зарядке аккумулятора) и др. Такую мощность называют *мощностью потерь*.

Сопротивление R приемника, в котором электрическая энергия преобразуется в теплоту, принято называть *активным сопротивлением*.

Активная (средняя) мощность цепи с активным сопротивлением. *Активной мощностью P* принято называть среднюю за период мощность, которая характеризует мощность потерь.

Для рассматриваемой цепи активную мощность нетрудно определить. Среднее значение мощности P в цепи с активным сопротивлением R равно высоте прямоугольника с основанием T , равновеликого площади S (заштрихованная площадь на рис. 9.2), ограниченной кривой $p(t)$ и осью абсцисс.

Из равенства площадей $PT = S$ следует:

$$P = \frac{1}{T} S. \quad (9.9)$$

Представим площадь S как сумму площадей элементарных площадок, каждая из которых $ds = p dt$:

$$S = \int_0^T p dt.$$

Подставляя в формулу (9.9) полученное выражение площади S и мгновенное значение мощности (см. формулу (9.7)), получим

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T (UI + UI \sin(2\omega t - 90^\circ)) dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI dt = UI,$$

так как среднее за период значение переменной величины равно нулю:

$$\frac{1}{T} \int_0^T UI \sin(2\omega t - 90^\circ) dt = 0.$$

Таким образом, средняя за период мощность P равна постоянной составляющей мгновенной мощности p (см. формулу (9.7)) и согласно формуле (9.8) составляет половину максимального значения мгновенной мощности:

$$P = P_{\max}/2. \quad (9.10)$$

Так как $U = RI$, а $I = U/R$, то среднюю мощность можно выразить как

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (9.11)$$

9.2. Цепь с индуктивностью

Катушка индуктивности с преобладающим влиянием индуктивности L на ток в цепи, когда активным сопротивлением R и емкостью C можно пренебречь из-за их малости, называется *идеальной катушкой*. В электрических цепях идеальную катушку представляют схемой замещения (рис. 9.3, а).

Ток и напряжение на индуктивности. Допустим, что в цепи (см. рис. 9.3, а) известны индуктивность L и ток

$$i = I_m \sin \omega t. \quad (9.12)$$

Определим напряжение и мощность цепи.

Протекающий по виткам ток (см. формулу (9.12)) создает магнитное поле, поток которого пронизывает витки катушки. Согласно формуле (5.40) собственное потокоцепление с витками катушки

$$\Psi = Li = LI_m \sin \omega t = \Psi_m \sin \omega t,$$

где Ψ — амплитуда синусоидального потокоцепления, $\Psi_m = LI_m$.

Изменение потокоцепления вызывает появление в витках катушки ЭДС самоиндукции e_L , препятствующей изменению тока в цепи (см. подразд. 7.1). Согласно формуле (7.7) ЭДС самоиндукции:

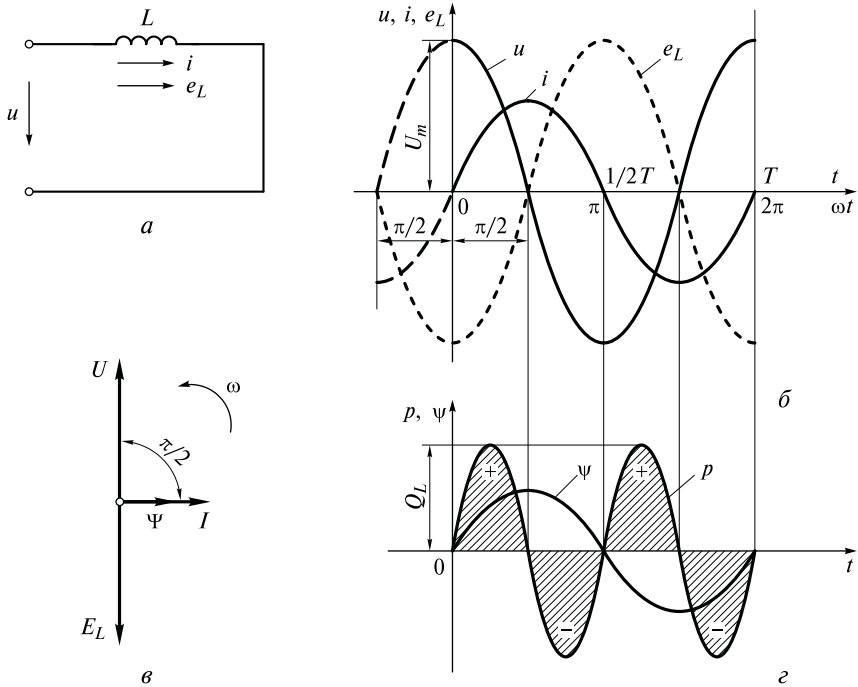


Рис. 9.3. Цепь с индуктивностью:

a — схема замещения; *б* — графики тока, напряжения, противоЭДС самоиндукции; *в* — векторная диаграмма; *г* — графики мощности и потокосцепления

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d(I_m \sin \omega t)}{dt} = -\omega L I_m \frac{d \sin \omega t}{d\omega t} = -\omega L I_m \cos \omega t;$$

$$e_L = -\omega L I_m \cos \omega t = E_{Lm} \sin(\omega t - \pi/2), \quad (9.13)$$

где E_{Lm} — амплитуда ЭДС самоиндукции, $E_{Lm} = -\omega L I_m$.

Для цепи с индуктивностью при отсутствии активного сопротивления для любого момента времени можно записать уравнение по второму закону Кирхгофа в мгновенных значениях:

$$u + e_L = 0.$$

Тогда приложенное к катушке напряжение:

$$u = -e_L; \quad (9.14)$$

$$u = -e_L = \omega L I_m \cos \omega t = U_m \cos \omega t = U_m \sin(\omega t + \pi/2). \quad (9.15)$$

Из формул (9.13) и (9.15) следует, что амплитуда синусоидального напряжения на катушке

$$U_m = -E_{Lm} = \omega L I_m.$$

Графики (рис. 9.3, б) и векторная диаграмма (рис. 9.3, в) цепи с индуктивностью дают наглядное представление о характере изменения и взаимном расположении величин: напряжение на индуктивности опережает ток на угол $\pi/2$ ($1/4$ периода T) и находится в противофазе с ЭДС самоиндукции. При этом амплитуды напряжения и ЭДС равны.

Характер изменения ЭДС самоиндукции соответствует закону Ленца: при нарастании тока на интервале времени t от 0 до $1/4T$ ЭДС направлена навстречу току, а при уменьшении тока (следующие полпериода) направлена одинаково с ним и т. д. В те моменты, когда ток проходит через амплитудные значения, скорость его изменения равна нулю. Соответственно равна нулю и ЭДС.

Индуктивное сопротивление. Закон Ома для цепи с индуктивностью. Выражения, связывающие амплитудные значения напряжения и тока в цепи с индуктивностью:

$$U_m = \omega L I_m = x_L I_m; \quad I_m = \frac{U_m}{\omega L} = \frac{U_m}{x_L}, \quad (9.16)$$

принято называть законом Ома для участка цепи переменного тока с индуктивностью в амплитудных значениях.

Коэффициент пропорциональности ωL между амплитудными значениями напряжения и тока обозначается x_L и называется *реактивным сопротивлением индуктивности*, или *индуктивным сопротивлением*:

$$x_L = \omega L = 2\pi f L. \quad (9.17)$$

Индуктивное сопротивление измеряется в омах, как и активное сопротивление:

$$[x_L] = [\omega L] = \frac{1}{c} \text{ Гн} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{c} = \text{Ом},$$

но его физическая природа не похожа на физическую природу активного сопротивления. Индуктивное сопротивление связано с изменением магнитного поля переменного тока в индуктивности и отражает инерционные свойства электрической цепи — реакцию на это изменение: возникновение в цепи противоЭДС самоиндукции, ее влияние на ток в цепи.

Индуктивное сопротивление пропорционально индуктивности L и частоте переменного тока f . Цепь с индуктивным элементом

не оказывает сопротивления, если частота тока равна нулю (постоянный ток). *Чем выше частота переменного тока, тем больше индуктивное сопротивление цепи.*

Разделив выражение (9.16) на $\sqrt{2}$, получим:

$$\frac{U_m}{\sqrt{2}} = \omega L \frac{I_m}{\sqrt{2}} = x_L \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}\omega L} = \frac{U_m}{\sqrt{2}x_L},$$

или

$$U = \omega L I = x_L I; \quad I = \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{x_L}. \quad (9.18)$$

Выражения (9.18) представляют собой закон Ома в цепи с индуктивностью L в действующих значениях.

Формулировка закона: действующее значение тока в цепи с индуктивностью равно действующему значению напряжения, деленному на индуктивное сопротивление.

При расчете цепей переменного тока необходимо иметь в виду, что для цепи с индуктивностью закон Ома применим только в амплитудных (см. формулу (9.16)) и действующих значениях (см. формулу (9.18)) тока и напряжения. Закон Ома не может применяться для мгновенных значений в привычном виде: $u \neq x_L i \neq x_L I_m \sin \omega t$, так как индуктивное сопротивление x_L (см. формулу (9.17)) не учитывает сдвиг фаз между напряжением и током. В связи с этим согласно формуле (9.15) имеем

$$u = x_L I_m \cos \omega t \neq x_L I_m \sin \omega t.$$

Мгновенная и реактивная мощности цепи с индуктивностью.

Мгновенная мощность цепи с индуктивностью определяется произведением мгновенных значений напряжения и тока:

$$p = ui = U_m \cos \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \cos \omega t \cdot \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t;$$

$$p = UI \sin 2\omega t = Q_L \sin 2\omega t, \quad (9.19)$$

где Q_L — амплитуда мгновенной мощности, $Q_L = UI$.

Выясним физический смысл энергетических процессов, происходящих в цепи с индуктивностью, для чего обратимся к графику мощности (рис. 9.3, з), построенному в соответствии с формулой (9.19). График изменения мощности p представляет собой синусоиду двойной частоты. Мгновенная мощность в течение периода 4 раза изменяет знак: в моменты времени $1/4T$, $1/2T$, $3/4T$, T .

Изменение знака мощности означает, что направление потока энергии изменяется.

В первую четверть периода, когда ток в цепи увеличивается, ЭДС самоиндукции в катушке направлена против тока, и она является приемником энергии. В это время энергия накапливается в магнитном поле катушки за счет энергии первичного источника (сети) (см. рис. 9.3, *з*, заштрихованная площадка «+»).

Во вторую четверть периода, когда ток уменьшается, направление ЭДС самоиндукции и тока в катушке совпадают, и катушка является источником энергии. Энергия первичного источника пополняется за счет магнитного поля катушки — возвращается в сеть (см. рис. 9.3, *з*, заштрихованная площадка «-»).

В следующую половину периода процесс повторяется и т. д.

Таким образом, в процессе протекания тока в катушке происходит периодический обмен энергией между сетью и катушкой: электрическая энергия сети преобразуется в энергию магнитного поля катушки, и наоборот.

В процессе обмена энергией количество энергии, накапливаемой в катушке за одну четверть периода, равно количеству энергии, возвращаемой обратно в следующую четверть периода. В идеальной катушке (где не учитывается ее активное сопротивление) происходит только периодический обмен энергией между сетью и катушкой. Необратимого преобразования (в тепловую, механическую или химическую энергию), называемого *потерями энергии*, не происходит.

Активная (средняя) мощность за период. Очевидно, что энергия, полученная индуктивностью за каждые $1/2T$, равна нулю, а значит, она равна нулю и за весь период T . Следовательно, в цепи с индуктивностью и средняя мощность за период, характеризующая мощность потерь, равна нулю: $P = 0$.

Реактивная индуктивная мощность. Скорость накопления и убыли энергии магнитного поля идеальной катушки характеризует мгновенная мощность индуктивности, которая изменяется по гармоническому закону (см. формулу (9.19)). Максимальное значение скорости накопления и убыли энергии магнитного поля характеризует амплитуда Q_L мгновенной мощности. Она носит название *реактивной индуктивной мощности*.

Таким образом, реактивная мощность цепи с индуктивностью равна произведению действующих значений напряжения и тока цепи:

$$Q_L = UI = \omega LI^2 = \omega L \frac{I_m^2}{2} = \omega W_{L\max}, \quad (9.20)$$

где $W_{L\max}$ — максимальное значение энергии, запасаемой в магнитном поле катушки.

Согласно формуле (5.59) имеем

$$W_{L\max} = L \frac{I_m^2}{2} = LI^2.$$

Для внесения ясности в вопрос о характере мощности единицу реактивной мощности называют *вар* (*вольт-ампер реактивный*) в отличие от единицы измерения активной мощности — ватта:

$$[Q_L] = [UI] = \text{В} \cdot \text{А} = \text{вар}.$$

Более крупная единица

$$1 \text{ квар (киловольт-ампер реактивный)} = 1 \cdot 10^3 \text{ вар}.$$

9.3. Цепь с емкостью

Конденсатор с идеальным диэлектриком, в котором предполагается полное отсутствие тока проводимости и потерь энергии, называется *идеальным конденсатором*. На ток в цепи с идеальным конденсатором оказывает влияние только его емкость C .

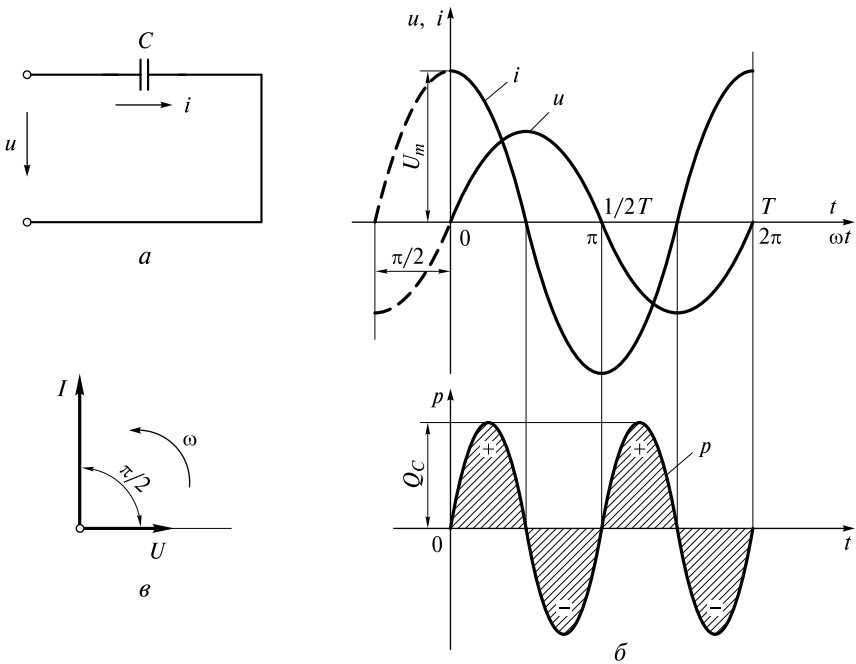


Рис. 9.4. Цепь с емкостью:

a — схема замещения; b — графики тока, напряжения и мощности; c — векторная диаграмма

Идеальный конденсатор в электрических цепях представляют схемой замещения (рис. 9.4, а).

Ток, напряжение и сопротивление в цепи с емкостью. Известно, что заряд конденсатора пропорционален напряжению на его обкладках (см. формулу (1.34)). Изменение напряжения сопровождается изменением заряда на обкладках конденсатора: $dq = Cdu$.

Определим скорость изменения заряда, разделив представленное равенство на dt (приращение времени):

$$\frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}.$$

Таким образом, скорость изменения заряда пропорциональна скорости изменения напряжения. Но скорость изменения заряда в элементах цепи согласно формуле (2.2) равна электрическому току. Отсюда

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}. \quad (9.21)$$

Таким образом, ток в цепи с конденсатором пропорционален скорости изменения напряжения на его обкладках.

При постоянном напряжении сети в установившемся режиме (когда обкладки конденсатора зарядились) ток в цепи конденсатора прекращается и наличие конденсатора в цепи равнозначно обрыву цепи.

При переменном напряжении сети электрическая цепь с конденсатором непрерывна — ток в цепи конденсатора протекает беспрерывно, пока цепь находится под напряжением.

Как осуществляется непрерывность течения переменного тока в цепи с емкостью с физической точки зрения? При изменении напряжения во внешнем по отношению к конденсатору участке цепи происходит постоянное движение электронов (ток проводимости) через источник: зарядка и разрядка обкладок конденсатора. Одновременно внутри конденсатора совершается поляризация и деполяризация диэлектрика: возникает ток смещения, обусловленный образованием и поворотом диполей. При этом ток проводимости равен току смещения.

Допустим, что напряжение на конденсаторе изменяется по синусоидальному закону:

$$u = U_m \sin \omega t. \quad (9.22)$$

Подставив в выражение (9.21) выражение напряжения (9.22), получим уравнение мгновенного значения тока в цепи с емкостью:

$$\begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = C \frac{d(U_m \sin \omega t)}{dt} = C \omega U_m \cos \omega t = \\ &= I_m \cos \omega t = I_m \sin(\omega t + \pi / 2). \end{aligned} \quad (9.23)$$

Из формулы (9.23) следует, что ток в цепи с емкостью опережает напряжение на угол $\pi/2$ или на четверть периода ($1/4T$). Графики тока, напряжения и мощности для цепи с емкостью представлены на рис. 9.4, б, векторная диаграмма — на рис. 9.4, в.

Согласно формуле (9.23) амплитуда тока

$$I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{x_C}, \quad (9.24)$$

где

$$x_C = 1/(\omega C) = 1/(2\pi fC) \quad (9.25)$$

называется *реактивным сопротивлением емкости*, или *емкостным сопротивлением*. Емкостное сопротивление измеряется в омах, как и активное, и индуктивное сопротивления:

$$[x_C] = \left[\frac{1}{\omega C} \right] = \frac{1}{\frac{1}{\text{с}} \Phi} = \frac{1}{\frac{1}{\text{с}} \frac{\text{Кл}}{\text{В}}} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом}. \quad (9.26)$$

Емкостное сопротивление обратно пропорционально частоте. Чем больше частота, тем меньше емкостное сопротивление, и наоборот, чем меньше частота, тем больше емкостное сопротивление. Формула (9.25) отражает факт, что при постоянном напряжении сети частота $f = 0$, емкостное сопротивление $x_C = \infty$, что равносильно обрыву цепи, и постоянный ток через емкость не проходит. Исходя из этого можно сделать вывод о физической природе емкостного сопротивления: *емкостное сопротивление отражает противодействие току в цепи со стороны электрического поля заряженного (при постоянном напряжении сети) или перезаряжаемого (при переменном напряжении сети) конденсатора.*

Выражения, связывающие амплитудные значения напряжения U_m и тока I_m :

$$I_m = \frac{U_m}{x_C}; U_m = I_m x_C; x_C = \frac{U_m}{I_m}, \quad (9.27)$$

принято называть законом Ома в амплитудных значениях для цепи переменного тока с идеальной емкостью.

Разделив выражение (9.27) на $\sqrt{2}$, получим:

$$\frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2} x_C}; \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} x_C; x_C = \frac{U_m/\sqrt{2}}{I_m/\sqrt{2}},$$

или

$$I = \frac{U}{x_C}; U = Ix_C; x_C = \frac{U}{I}. \quad (9.28)$$

Выражения (9.28) представляют собой закон Ома в действующих значениях для цепи с емкостью C .

При расчете цепей переменного тока необходимо иметь в виду следующее: для цепи с емкостью закон Ома применим только в амплитудных (см. формулу (9.27)) и действующих (см. формулу (9.28)) значениях тока и напряжения. Закон Ома не может применяться для мгновенных значений: $i \neq u/x_C \neq U_m \sin \omega t / x_C \neq I_m \sin \omega t$, так как емкостное сопротивление x_C не учитывает сдвиг фаз на $\pi/2$ между напряжением и током. Согласно формуле (9.23) ток

$$i = I_m \cos \omega t \neq I_m \sin \omega t.$$

Мощности цепи с емкостью. Мгновенная мощность цепи с емкостью определяется произведением мгновенных значений напряжения и тока:

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \cos \omega t = U_m I_m \sin \omega t \cos \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t;$$

$$p = UI \sin 2\omega t = Q_C \sin 2\omega t, \quad (9.29)$$

где Q_C — амплитуда мгновенной мощности цепи с емкостью, $Q_C = UI$.

Проанализируем физический смысл энергетических процессов в цепи переменного тока с емкостью, для чего обратимся к графику мощности (см. рис. 9.4, б), построенному в соответствии с формулой (9.29).

График изменения мощности представляет собой синусоиду двойной частоты. Мгновенная мощность в течение периода 4 раза изменяет знак: в моменты времени $1/4T$, $1/2T$, $3/4T$, T . Изменение знака мощности означает, что направление потока энергии изменяется.

В первую четверть периода, когда напряжение на конденсаторе увеличивается, энергия имеет положительный знак — направления тока и приложенного напряжения совпадают. Конденсатор в это время заряжается, т.е. является приемником энергии. Энергия накапливается в электрическом поле конденсатора за счет работы внешнего источника. Ток при зарядке, имея положительное направление, уменьшается по мере накопления заряда на обкладках конденсатора и увеличения электрического поля обкладок.

Во вторую четверть периода, когда напряжение уменьшается, энергия в том же количестве возвращается в сеть (к источнику).

Ток в цепи направлен навстречу напряжению внешнего источника (сети). В это время конденсатор разряжается, являясь источником энергии.

В следующую половину периода процесс повторяется уже при отрицательных направлениях напряжения и тока — идет накопление энергии в конденсаторе, он заряжается в противоположном направлении и т. д.

Таким образом, в процессе протекания тока в емкости происходит периодический обмен энергией между сетью и конденсатором. В процессе обмена энергией количество энергии, накапливаемой в емкости за одну четверть период (см. рис. 9.4, б, заштрихованная площадка «+»), равно количеству энергии, возвращаемой обратно в сеть в следующую четверть периода (см. рис. 9.4, б, заштрихованная площадка «-»).

В идеальной емкости, где не учитывается ее активное сопротивление, происходит только периодический обмен энергией между сетью и конденсатором. Необратимого преобразования электрической энергии в тепловую, механическую, химическую (энергетических потерь) не происходит.

Активная (средняя) мощность за период. Очевидно, что энергия, полученная емкостью за каждые $1/2T$, равна нулю, а значит, она равна нулю и за весь период. Следовательно, равна нулю и средняя мощность цепи с емкостью за период T , характеризующая мощность потерь: $P = 0$.

Реактивная мощность цепи с емкостью. Скорость накопления и убыли энергии электрического поля конденсатора характеризуется мгновенной мощностью идеальной емкости, которая изменяется по гармоническому закону (см. формулу (9.29)). Амплитудное значение мгновенной мощности Q_C носит название *реактивной емкостной мощности*. Эта мощность равна произведению действующих значений напряжения и тока в цепи:

$$Q_C = UI = \omega CU^2 = \omega C \frac{U_m^2}{2} = \omega W_{C \max}, \quad (9.30)$$

где $W_{C \max}$ — максимальное значение энергии, запасаемой в электрическом поле конденсатора.

Согласно формуле (1.44) можно записать

$$W_{C \max} = \omega C \frac{U_m^2}{2} = CU^2.$$

Так же, как и в цепи с индуктивностью, для внесения ясности в вопрос о характере мощности единицу реактивной мощности называют *вар (вольт-ампер реактивный)*:

$$[Q_C] = [UI] = \text{В} \cdot \text{А} = \text{вар}.$$

Более крупная единица:

$$1 \text{ квар (киловольт-ампер реактивный)} = 1 \cdot 10^3 \text{ вар.}$$

9.4. Цепь с реальной катушкой индуктивности

Реальные устройства, обладающие индуктивностью L . Реальные устройства, обладающие индуктивностью (обмотки дросселей, трансформаторов, электрических машин, линии электропередачи и др.), отличаются от идеальных. Они обладают еще и вполне реальным активным сопротивлением, которым обусловлены необратимые преобразования энергии (потери) в цепи. Переменный ток в реальной катушке сопровождается не только изменением энергии в магнитном поле, но и необратимым преобразованием электрической энергии в другой вид: в обмотке катушки из-за активного сопротивления провода электрическая энергия преобразуется в теплоту в соответствии с законом Джоуля—Ленца. Если катушка имеет ферромагнитный сердечник, к активным потерям в обмотке добавляются еще и активные потери на перемагничивание сердечника (см. подразд. 6.1).

Таким образом, в реальной катушке ее активная P и реактивная Q_L мощности отличны от нуля. Поэтому в схеме замещения реальная катушка должна быть представлена соединением активного и реактивного элементов.

Конструктивно оба элемента неразделимы. Однако реальную катушку можно представить эквивалентной схемой замещения цепи из двух конструктивно не совмещенных элементов, один из которых характеризуется активной мощностью P , равной активной мощности реальной катушки, а другой — реактивной (индуктивной) мощностью Q_L , равной реактивной мощности реальной катушки.

Схема замещения катушки с последовательным соединением активного и индуктивного элементов. Реальную катушку (с потерями) можно представить эквивалентной схемой последовательного или параллельного соединения активного и индуктивного элементов.

Рассмотрим схему замещения последовательного соединения (рис. 9.5, *a*). При этом активное сопротивление R катушки определяется мощностью потерь P реальной катушки:

$$R = \frac{P}{I^2}.$$

Индуктивность определяется конструкцией катушки (в подразд. 5.5 приведен вывод формул расчета индуктивности, достаточно часто применяемых конструкций).

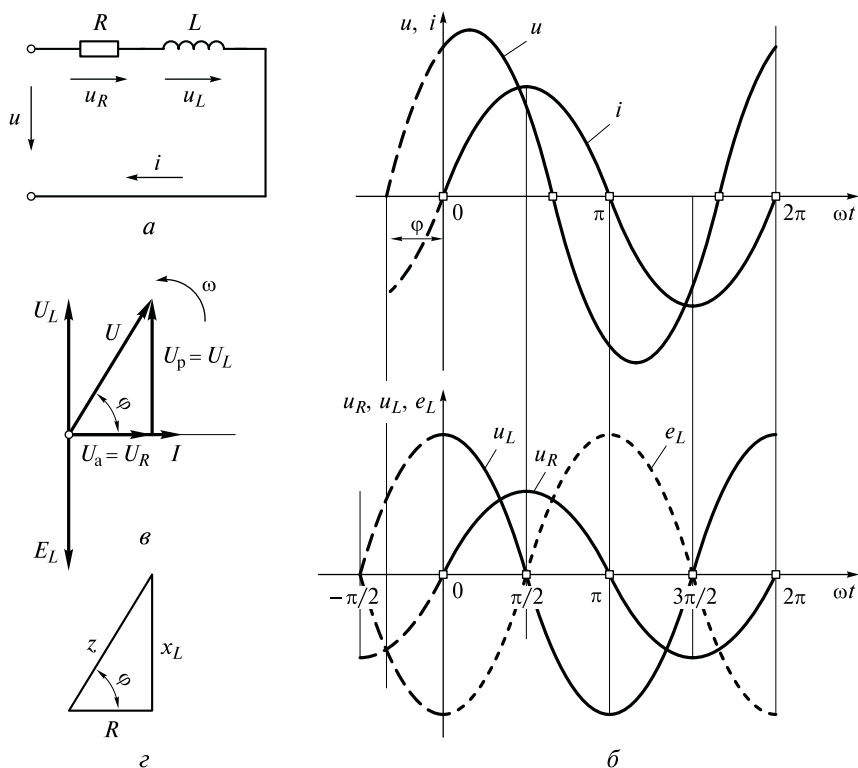


Рис. 9.5. Цепь с сопротивлением и индуктивностью:

a — схема замещения; b — графики тока, общего напряжения, напряжений на активном сопротивлении и индуктивности, противоЭДС самоиндукции; c — векторная диаграмма; d — треугольник сопротивлений

Ток и напряжение в цепи. Предположим, что ток в цепи (см. рис. 9.5, a) выражается уравнением

$$i = I_m \sin \omega t.$$

Так как соединение элементов цепи последовательное, напряжение цепи может быть выражено уравнением

$$u = u_R + u_L. \quad (9.31)$$

Напряжение цепи можно получить и из уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа, если учесть, что при переменном токе в катушке возникает ЭДС самоиндукции e_L и ток в цепи определяется действием двух величин: приложенного напряжения u и ЭДС самоиндукции e_L :

$$u + e_L = iR,$$

откуда

$$u = iR - e_L = iR + L \frac{di}{dt} = u_R + L \frac{di}{dt}.$$

Из сопоставления последнего уравнения и уравнения (9.31) заключаем, что напряжение на индуктивной составляющей цепи

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -e_L,$$

т. е. уравновешивает ЭДС самоиндукции.

Оба слагаемых в правой части равенства (9.31) являются синусоидальными функциями времени. Согласно выводам, полученным в подразд. 9.1 и 9.2, напряжение на сопротивлении u_R (которое принято называть *активной составляющей напряжения* u_a) совпадает по фазе с током, а напряжение на индуктивности u_L (называемое *реактивной индуктивной составляющей напряжения* u_p) опережает ток i на $\pi/2$ (рис. 9.5, б):

$$u_R = I_m R \sin \omega t = U_{Rm} \sin \omega t;$$

$$u_L = I_m \omega L \sin(\omega t + \pi/2) = I_m x_L \sin(\omega t + \pi/2) = U_{Lm} \sin(\omega t + \pi/2).$$

Таким образом, согласно формуле (9.31) общее напряжение цепи может быть выражено уравнением

$$u = u_R + u_L = U_{Rm} \sin \omega t + U_{Lm} \sin(\omega t + \pi/2). \quad (9.32)$$

На рис. 9.5, б показан график напряжения u как результат сложения синусоид u_R и u_L .

Векторная диаграмма и треугольник напряжений. Так как при сложении синусоидальных величин одной частоты получается синусоидальная величина той же частоты, уравнение мгновенного значения напряжения на выводах цепи может быть представлено в виде

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Для определения амплитуды U_m и начальной фазы ψ_u суммарного синусоидального напряжения u воспользуемся векторным способом сложения синусоидальных величин.

Длины слагаемых векторов равны в выбранном масштабе напряжений их амплитудным значениям:

$$U_{Rm} = RI_m; U_{Lm} = \omega LI_m = x_L I_m,$$

или действующим значениям:

$$U_R = RI; U_L = \omega LI = x_L I.$$

Для удобства построений выбираем горизонтальное расположение оси абсцисс x , от положительного направления которой отсчитываются фазовые углы, хотя в общем случае расположение осей координат (x, y) может быть выбрано произвольно.

За исходный вектор диаграммы принимаем вектор тока \bar{I} , направление которого совмещаем с положительным направлением оси абсцисс x , так как начальная фаза заданного тока $\psi_i = 0$. Вектор \bar{U}_R по направлению совпадает с вектором тока \bar{I} , а вектор \bar{U}_L опережает вектор \bar{I} на угол $\pi/2$.

Вектор общего напряжения равен геометрической сумме векторов:

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L.$$

Из построений (рис. 9.5, в) следует, что вектор общего напряжения \bar{U} опережает вектор тока \bar{I} на угол $0 < \varphi < 90^\circ$.

Длина U вектора общего напряжения равна гипотенузе прямоугольного треугольника, катетами которого являются длины векторов напряжений на активном и индуктивном сопротивлениях U_R и U_L :

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}. \quad (9.33)$$

Этот треугольник называется *треугольником напряжений* реальной катушки.

Амплитуда U_m общего напряжения u согласно формуле (8.27):

$$U_m = U\sqrt{2},$$

где U — действующее значение общего напряжения u , которое определяется выражением (9.33).

Поскольку вектор тока совпадает с положительным направлением оси x , а вектор общего напряжения опережает ток на угол φ , начальная фаза общего напряжения ψ_u равна положительному значению угла сдвига фаз φ между общим напряжением u и током i :

$$\psi_u = \varphi.$$

Таким образом, уравнение мгновенного значения общего напряжения имеет вид

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi). \quad (9.34)$$

Здесь угол φ определяется из треугольника напряжений:

$$\varphi = \arctg \frac{U_L}{U_R}. \quad (9.35)$$

Чем больше индуктивная составляющая напряжения U_L по сравнению с активной составляющей U_R , тем больше угол, на который общее напряжение цепи \bar{U} опережает ток \bar{I} .

Полное сопротивление катушки. Если все стороны треугольника напряжений (см. рис. 9.5, *в*) разделить на одну и ту же величину, получим подобный треугольник, с теми же углами между его сторонами, как у исходного треугольника. Если в качестве делителя взять действующее значение тока I в цепи (ток одинаков во всех участках неразветвленной цепи), то получим подобный треугольник (рис. 9.5, *з*), катетами которого являются активное сопротивление R и индуктивное сопротивление x_L :

$$R = \frac{U_R}{I}; \quad x_L = \frac{U_L}{I}.$$

Такой треугольник называется *треугольником сопротивлений*.

Гипотенуза треугольника сопротивлений, равная U/I , также является сопротивлением, которое обозначается z и называется *полным сопротивлением цепи*. Таким образом,

$$z = \frac{U}{I}. \quad (9.36)$$

Стороны треугольника сопротивлений являются скалярными, а не векторными величинами (т.е. характеризуются только числовым значением, без указания направления), так как сопротивления не являются функциями времени.

Из треугольника сопротивлений следует

$$z = \sqrt{R^2 + x_L^2}. \quad (9.37)$$

Величина полного сопротивления z является коэффициентом пропорциональности между действующими (или максимальными) значениями напряжения и тока цепи, поэтому выражение (9.36) и его производные:

$$z = \frac{U}{I}; \quad U = zI; \quad I = \frac{U}{z}, \quad (9.38)$$

называют законом Ома цепи переменного тока в действующих значениях.

В цепи переменного тока с реальной катушкой, как и во всех рассмотренных ранее цепях, закон Ома не может применяться для мгновенных значений напряжения и тока: $i \neq u/z$.

Тригонометрические функции угла φ связывают все величины треугольников напряжений и сопротивлений:

$$\cos \varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{R}{z}; \quad \sin \varphi = \frac{U_L}{U} = \frac{x_L}{z}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L}{U_R} = \frac{x_L}{R}. \quad (9.39)$$

Мощность цепи с сопротивлением и индуктивностью. Мгновенная мощность катушки:

$$p = ui = U_m \sin(\omega t + \varphi) \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t. \quad (9.40)$$

Для наглядного представления о характере изменения мощности в цепи построим график изменения мгновенной мощности p от времени t в прямоугольной системе координат (рис. 9.6, а). Так как мгновенная мощность равна произведению $p = ui$, то график можно построить в одной системе координат с графиками напряжения и тока, умножая ординаты кривых u и i (с учетом их масштабов) для ряда значений аргумента — времени t .

Можно упростить построение, преобразовав выражение (9.40) с помощью известной из тригонометрии формулы

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{2}. \quad \text{Примем } \omega t + \varphi = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \omega t = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

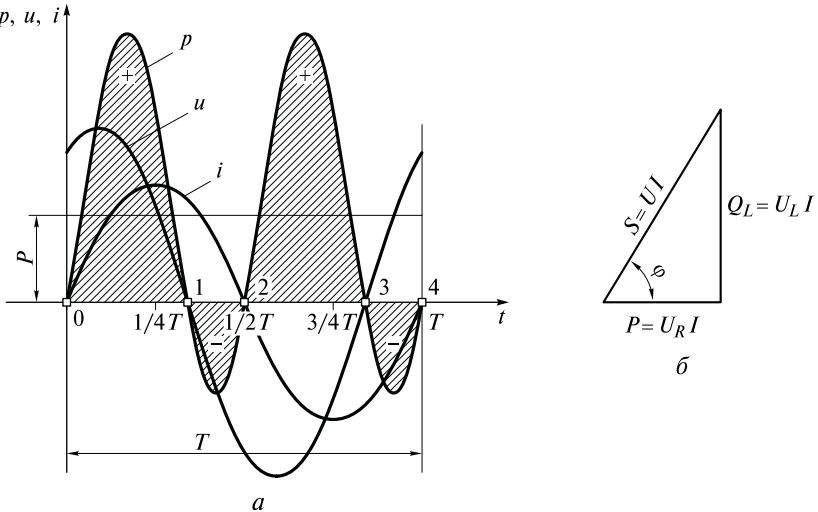


Рис. 9.6. График мгновенной мощности (а) и треугольник мощностей (б) в цепи с активным сопротивлением и индуктивностью

Решим систему двух последних уравнений относительно α и β .
Искомые значения α и β : $\alpha = \varphi$; $\beta = 2\omega t + \varphi$.

Тогда

$$\sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t = \frac{\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)}{2}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (9.40), получим

$$\begin{aligned} p &= U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t = \frac{U_m I_m \cos \varphi}{2} - \\ &- \frac{U_m I_m \cos(2\omega t + \varphi)}{2} = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi) = \\ &= UI \cos \varphi + UI \sin(2\omega t + \varphi - \pi/2). \end{aligned} \quad (9.41)$$

Согласно формуле (9.41) построение графика мгновенной мощности сводится к построению синусоиды удвоенной частоты (второе слагаемое) относительно некоторой оси, сдвинутой параллельно оси t вверх на величину постоянной составляющей, равной $UI \cos \varphi$.

Из графика мгновенной мощности p (см. рис. 9.6, *a*) следует, что в течение периода мощность 4 раза изменяет знак, следовательно, направление потока энергии в реальной катушке, как и в идеальной, в течение периода изменяется. При положительном значении мощности энергия переходит от источника в приемник, а при отрицательном значении — наоборот.

Очевидно, что количество энергии, поступившей в приемник (положительная площадь), больше возвращенной обратно (отрицательная площадь). Дело в том, что на интервалах времени $0-1$ и $2-3$ энергия, получаемая цепью от источника питания, частично необратимо преобразуется в тепловую энергию в сопротивлении R и в магнитопроводе (при перемагничивании) и частично запасается в магнитном поле индуктивности. На интервалах времени $1-2$ и $3-4$ энергия, запасенная в магнитном поле катушки, частично преобразуется в теплоту, частично возвращается обратно в сеть.

Таким образом, в цепи с активным сопротивлением и индуктивностью наряду с непрерывным превращением электрической энергии в другой вид энергии (активная энергия W_a) часть энергии цепи совершает колебания между источником и приемником (реактивная индуктивная энергия W_p).

Средняя (активная) мощность цепи. Коэффициент мощности. Скорость необратимого процесса преобразования энергии оценивается средней мощностью за период, или активной мощностью:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)] dt = UI \cos \varphi. \quad (9.42)$$

Итак, активная мощность цепи равна произведению действующих значений напряжения U , тока I и $\cos \varphi$.

Множитель $\cos \varphi$ называется *коэффициентом мощности*, так как при неизменных значениях напряжения и тока в цепи значение активной мощности цепи изменяется в зависимости от $\cos \varphi$ от нуля при $\varphi = \pi/2$ до наибольшего значения $P = UI$ при $\varphi = 0$.

Треугольник мощностей. Полная мощность цепи. Если все стороны треугольника напряжений умножить на одну и ту же величину, например действующее значение тока I в цепи (ток одинаков во всех участках неразветвленной цепи), то получим подобный треугольник, с теми же углами между его сторонами, как у исходного треугольника (рис. 9.6, б). Катетами треугольника являются активная мощность цепи $P = U_R I$ и реактивная индуктивная мощность $Q_L = U_L I$. Такой треугольник называется *треугольником мощностей*.

Стороны треугольника мощностей являются скалярными, а не векторными величинами (т.е. характеризуются только числовым значением без указания направления), так как активная, реактивная и полная мощности не являются функциями времени — это произведения действующих значений.

Гипотенуза треугольника мощностей — произведение действующих значений общего напряжения цепи и тока UI — называется *полной мощностью цепи* и обозначается S :

$$S = UI. \quad (9.43)$$

Единица измерения полной мощности имеет название вольт-ампер (В·А); более крупная единица киловольт-ампер (кВ·А).

$$1 \text{ кВ} \cdot \text{А} = 1 \cdot 10^3 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Отличающиеся названия активной (Вт), реактивной (вар) и полной (В·А) мощностей позволяют определить, какую мощность рассматривают в конкретном случае.

Из треугольника мощностей следует:

$$S = \sqrt{P^2 + Q_L^2}; \quad (9.44)$$

$$P = S \cos \varphi = UI \cos \varphi. \quad (9.45)$$

Отсюда коэффициент мощности цепи

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{UI}. \quad (9.46)$$

Коэффициент мощности показывает, какая доля полной мощности $S = UI$ необратимо преобразуется в другой вид энергии (в данном случае — в теплоту).

Реактивная индуктивная мощность цепи

$$Q_L = S \sin \varphi = UI \sin \varphi. \quad (9.47)$$

9.5. Цепь с реальным конденсатором

Реальный конденсатор. Рассматривая процессы, протекающие в идеальном конденсаторе (см. подразд. 9.3), намеренно пренебрегают необратимыми энергетическими потерями от токов смещения и проводимости, считая их незначительными. Однако в реальном конденсаторе из-за несовершенства диэлектрика потери энергии от токов проводимости через толщину диэлектрика, по его поверхности и на поляризацию диэлектрика вполне сопоставимы с энергией, потребляемой конденсатором на его перезарядку. Эти потери необходимо учитывать.

Таким образом, при переменном напряжении в реальном конденсаторе наряду с непрерывным изменением энергии создаваемого в конденсаторе электрического поля, характеризуемой реактивной мощностью Q_C , происходит необратимый процесс преобразования электрической энергии в теплоту. Скорость необратимого процесса характеризуется активной мощностью P .

Поэтому в схеме замещения реальный конденсатор должен быть представлен соединением активного и реактивного элементов. Конструктивно оба элемента неразделимы. Однако реальный конденсатор можно представить схемой замещения цепи, состоящей из двух конструктивно не совмещенных элементов, один из которых характеризуется только активной мощностью P , равной активной мощности реального конденсатора, а другой — только реактивной (емкостной) мощностью Q_C , равной реактивной мощности реального конденсатора. В этом случае реальный конденсатор и цепь с разделенными параметрами (R и C) эквивалентны с энергетической точки зрения.

Схема замещения конденсатора с последовательным соединением активного и емкостного элементов. Реальный конденсатор (с потерями) можно представить эквивалентной схемой последовательного или параллельного соединения активного и емкостного элементов.

Рассмотрим схему замещения последовательного соединения (рис. 9.7, а), активное сопротивление R которой определяется мощностью потерь P реального конденсатора:

$$R = \frac{P}{I^2},$$

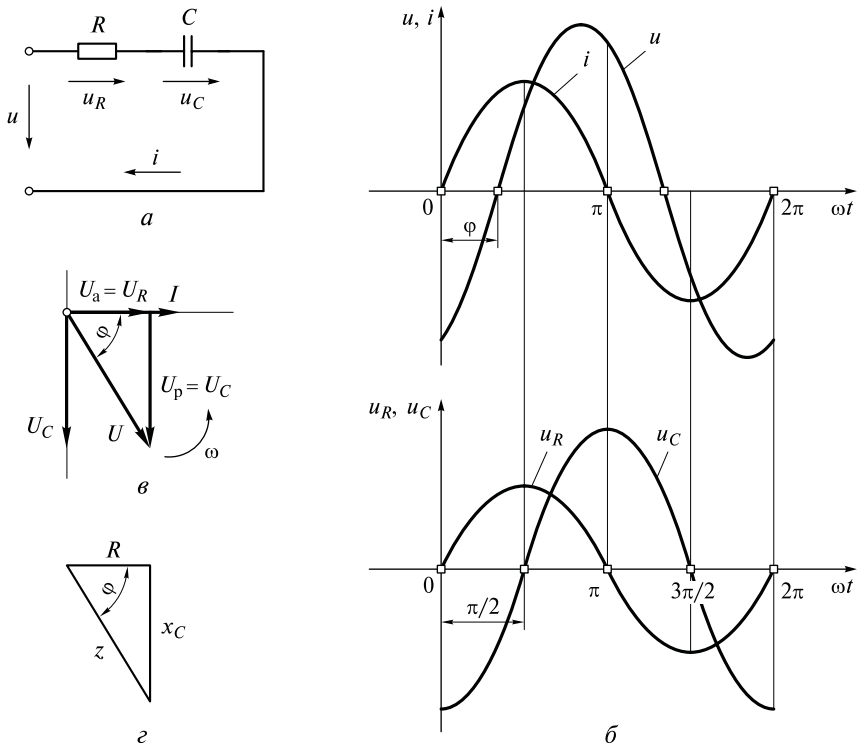


Рис. 9.7. Цепь с сопротивлением и емкостью:

a — схема замещения; *б* — графики тока, общего напряжения, напряжения на активном сопротивлении и емкости; *в* — векторная диаграмма; *г* — треугольник сопротивлений

а емкость — конструкцией устройства (в подразд. 1.5 приведены формулы расчета емкостей достаточно часто встречающихся на практике конструкций устройств, обладающих емкостью).

Ток и напряжение цепи. Предположим, что ток в цепи (см. рис. 9.7, *a*) выражается уравнением

$$i = I_m \sin \omega t.$$

Тогда напряжение на сопротивлении R

$$u_R = Ri = RI_m \sin \omega t = U_{Rm} \sin \omega t,$$

а напряжение на емкости

$$u_C = x_C I_m \sin(\omega t - \pi/2) = U_{Cm} \sin(\omega t - \pi/2).$$

Так как соединение элементов последовательное, напряжение цепи может быть выражено уравнением

$$u = u_R + u_C = U_{Rm} \sin \omega t + U_{Cm} \sin(\omega t - \pi/2). \quad (9.48)$$

На рис. 9.7, б показана синусоида напряжения как результат сложения синусоид u_R и u_C .

Векторная диаграмма и треугольник напряжений. Как известно (см. подразд. 8.2), при сложении синусоидальных величин одной частоты получается синусоидальная величина той же частоты, поэтому уравнение мгновенного значения напряжения на выводах цепи может быть представлено в следующем виде:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Для определения амплитуды U_m и начальной фазы ψ_u суммарного синусоидального напряжения u воспользуемся векторным способом сложения синусоидальных величин.

Длины слагаемых векторов равны их амплитудным значениям:

$$U_{Rm} = RI_m; U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega C} = x_C I_m,$$

или действующим значениям:

$$U_R = RI; U_C = \frac{I}{\omega C} = x_C I.$$

Для удобства построений здесь так же, как в цепи с реальной катушкой индуктивности, выбираем горизонтальное расположение оси абсцисс x , от положительного направления которой отсчитываются фазовые углы, хотя в общем случае расположение осей координат (x, y) может быть выбрано произвольно. За исходный вектор диаграммы (рис. 9.7, в) принимаем вектор тока \bar{I} , направление которого совмещаем с положительным направлением оси абсцисс, так как начальная фаза заданного тока $\psi_i = 0$.

Вектор \bar{U}_R по направлению совпадает с вектором тока \bar{I} , а вектор \bar{U}_C отстает от вектора \bar{I} на угол $\pi/2$. Вектор общего напряжения равен геометрической сумме векторов:

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_C.$$

Из построений следует, что вектор общего напряжения \bar{U} отстает от вектора тока \bar{I} на угол $0 < \varphi < 90^\circ$.

Этот треугольник называется *треугольником напряжений* реального конденсатора.

Длина U вектора общего напряжения равна гипотенузе прямоугольного треугольника, катетами которого являются длины векторов падений напряжения U_R и U_C :

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}. \quad (9.49)$$

Амплитуда U_m общего напряжения согласно формуле (8.27):

$$U_m = U\sqrt{2},$$

где U — действующее значение общего напряжения, которое определяется выражением (9.49).

Начальная фаза общего напряжения ψ_u равна отрицательному значению угла сдвига фаз φ между общим напряжением u и током i :

$$\psi_u = -\varphi,$$

поскольку вектор тока совпадает с положительным направлением оси x .

Таким образом, уравнение мгновенного значения общего напряжения имеет следующий вид:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = U\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi). \quad (9.50)$$

Здесь угол φ определяется из треугольника напряжений:

$$\varphi = \arctg \frac{U_C}{U_R}. \quad (9.51)$$

Полное сопротивление конденсатора. Если все стороны треугольника напряжений (см. рис. 9.7, в) разделить на действующее значение тока I в цепи (ток одинаков во всех участках неразветвленной цепи), то получим подобный треугольник (рис. 9.7, г), катетами которого являются активное сопротивление

$R = \frac{U_R}{I}$ и емкостное сопротивление $x_C = \frac{U_C}{I}$. Такой треугольник называется *треугольником сопротивлений*.

Гипотенуза треугольника сопротивлений также является сопротивлением, которое обозначается z и называется *полным сопротивлением цепи*. Таким образом,

$$z = \frac{U}{I}. \quad (9.52)$$

Из треугольника сопротивлений следует

$$z = \sqrt{R^2 + x_C^2}. \quad (9.53)$$

Стороны треугольника сопротивлений являются скалярными, а не векторными величинами (т.е. характеризуются только числовым значением без учета направления), так как сопротивления не являются функциями времени.

Полное сопротивление z является коэффициентом пропорциональности между действующими (максимальными) значениями напряжения и тока цепи, поэтому выражение (9.52) и его производные:

$$z = \frac{U}{I}; U = zI; I = \frac{U}{z}, \quad (9.54)$$

называются *законом Ома цепи переменного тока* в действующих или в максимальных значениях.

В цепи переменного тока с реальным конденсатором, как и во всех ранее рассмотренных цепях, закон Ома не может применяться для мгновенных значений напряжения и тока, т.е. $i \neq u/z$.

Тригонометрические функции угла φ связывают все величины треугольников напряжений и сопротивлений:

$$\cos \varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{R}{z}; \sin \varphi = \frac{U_C}{U} = \frac{x_C}{z}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{U_C}{U_R} = \frac{x_C}{R}. \quad (9.55)$$

Мощность цепи с сопротивлением и емкостью. Мгновенная мощность реального конденсатора

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m \sin(\omega t - \varphi) \cdot I_m \sin \omega t = \\ &= U_m I_m \sin(\omega t - \varphi) \sin \omega t. \end{aligned} \quad (9.56)$$

Для наглядного представления о характере изменения мощности в цепи построим график изменения мгновенной мощности p от времени t в прямоугольной системе координат (рис. 9.8, а).

Так как мгновенная мощность равна произведению $p = ui$, то график можно построить в одной системе координат с графиками напряжения и тока, умножая ординаты кривых u и i (с учетом их масштабов) для ряда значений аргумента — времени t .

Можно упростить построение, выполнив преобразование выражения (9.56) аналогично формуле (9.40).

В результате преобразования получим

$$\begin{aligned} p &= U_m I_m \sin(\omega t - \varphi) \sin \omega t = \frac{U_m I_m \cos \varphi}{2} - \\ &- \frac{U_m I_m \cos(2\omega t - \varphi)}{2} = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi) = \\ &= UI \cos \varphi + UI \sin(2\omega t - \varphi - \pi/2). \end{aligned} \quad (9.57)$$

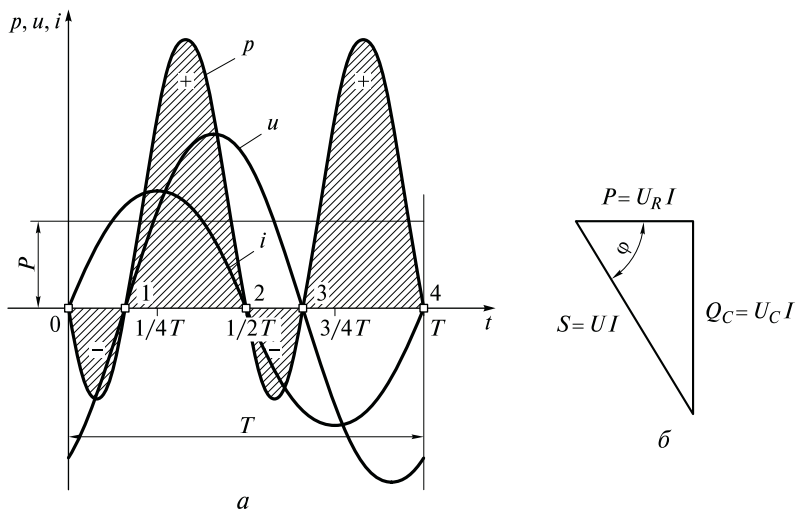


Рис. 9.8. График мгновенной мощности (а) и треугольник мощностей (б) в цепи с активным сопротивлением и емкостью

Согласно формуле (9.57) мгновенная мощность складывается из двух составляющих: постоянной составляющей $UI \cos \varphi$ и переменной гармонической составляющей удвоенной частоты $UI \sin(2\omega t - \varphi - \pi/2)$.

Из графика мгновенной мощности (см. рис. 9.8, а) следует, что в течение периода мощность 4 раза изменяет знак; следовательно, направление потока энергии в течение периода изменяется. При положительном значении мощности энергия переходит от источника в приемник, а при отрицательном значении — наоборот. Из графика p (см. рис. 9.8, а) видно, что количество энергии, поступившей в приемник (положительная площадь), больше возвращенной обратно (отрицательная площадь).

Положительная энергия, получаемая цепью от источника питания (интервалы времени 1—2 и 3—4), состоит из двух частей: одна часть необратимо преобразуется в тепловую энергию (расходуется в активном сопротивлении R и на поляризацию диэлектрика); другая часть запасается в электрическом поле емкости. На интервалах времени 0—1 и 2—3 запасенная конденсатором энергия электрического поля частично возвращается обратно в сеть, частично преобразуется в тепловую энергию.

Таким образом, в цепи с активным сопротивлением и емкостью наряду с непрерывным превращением электрической энергии в другой вид энергии (активная составляющая энергии W_a) часть энергии цепи совершает колебания между источником и приемником (реактивная емкостная составляющая энергии W_p).

Средняя за период, или активная, мощность цепи. Скорость необратимого процесса преобразования энергии оценивается средней мощностью за период (активной мощностью)

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi)] dt = UI \cos \varphi. \quad (9.58)$$

Итак, активная мощность цепи равна произведению действующих значений напряжения, тока и $\cos \varphi$. Как было сказано в подразд. 9.4, множитель $\cos \varphi$ называется *коэффициентом мощности*. Как и в цепи с реальной катушкой индуктивности, коэффициент мощности $\cos \varphi$ в цепи с реальным конденсатором показывает, какая доля мощности цепи, равная произведению UI , необратимо преобразуется в другой вид энергии (в данном случае — в теплоту).

Треугольник мощностей. Полная мощность цепи. Если все стороны треугольника напряжений умножить на одну и ту же величину, например действующее значение тока I в цепи (ток одинаков во всех участках неразветвленной цепи), то получим подобный треугольник, с теми же углами между его сторонами, как у исходного треугольника (рис. 9.8, б). Катетами треугольника являются активная мощность цепи $P = U_R I$ и реактивная емкостная мощность $Q_C = U_C I$. Такой треугольник называется *треугольником мощностей*. Стороны треугольника мощностей являются скалярными величинами, так как активная, реактивная и полная мощности не являются функциями времени — это произведения действующих значений.

Гипотенуза треугольника мощностей — произведение действующих значений общего напряжения цепи и тока UI — называется *полной мощностью цепи*:

$$S = UI. \quad (9.59)$$

Единица измерения полной мощности, как и в цепи с реальной катушкой индуктивности, имеет название вольт-ампер ($\text{В} \cdot \text{А}$). Более крупная единица — киловольт-ампер ($\text{кВ} \cdot \text{А}$)

$$1 \text{ кВ} \cdot \text{А} = 1 \cdot 10^3 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Из треугольника мощностей следует:

$$S = \sqrt{P^2 + Q_C^2}; \quad (9.60)$$

$$P = S \cos \varphi = UI \cos \varphi. \quad (9.61)$$

Согласно формуле (9.61) коэффициент мощности и реактивная емкостная мощность цепи соответственно:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{UI}; \quad (9.62)$$

$$Q_C = S \sin \varphi = UI \sin \varphi. \quad (9.63)$$

9.6. Последовательное соединение катушки индуктивности и конденсатора

Ток и напряжение цепи. Последовательное соединение катушки индуктивности и конденсатора (RLC -цепь) можно представить схемой замещения (рис. 9.9, а).

Предположим, что параметры цепи (R_1 , L , R_2 , C) известны и в цепи протекает переменный ток

$$i = I_m \sin \omega t.$$

Определим напряжения и мощности в цепи.

Представим напряжения на участках цепи в соответствии с выводами, сделанными в подразд. 9.1...9.3, учитывая, что по всем участкам последовательной цепи протекает один и тот же ток.

Напряжения на участках с активными сопротивлениями:

$$u_{R_1} = U_{R_1 m} \sin \omega t = R_1 I_m \sin \omega t; \quad u_{R_2} = U_{R_2 m} \sin \omega t = R_2 I_m \sin \omega t.$$

Напряжение на участке с индуктивностью

$$u_L = U_{L m} \sin(\omega t + \pi/2) = x_L I_m \sin(\omega t + \pi/2).$$

Напряжение на участке с емкостью

$$u_C = U_{C m} \sin(\omega t - \pi/2) = x_C I_m \sin(\omega t - \pi/2).$$

При последовательном соединении элементов цепи мгновенное значение общего напряжения цепи равно сумме мгновенных значений напряжений на отдельных ее участках:

$$u = u_{R_1} + u_L + u_{R_2} + u_C.$$

Так как сумма синусоидальных составляющих также является синусоидой, *общее напряжение цепи* может быть представлено в виде

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_U) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_U).$$

Амплитуду и начальную фазу общего напряжения цепи из-за несовпадения фаз слагаемых синусоидальных составляющих удобнее всего получить векторным способом. Так как по всем элемен-

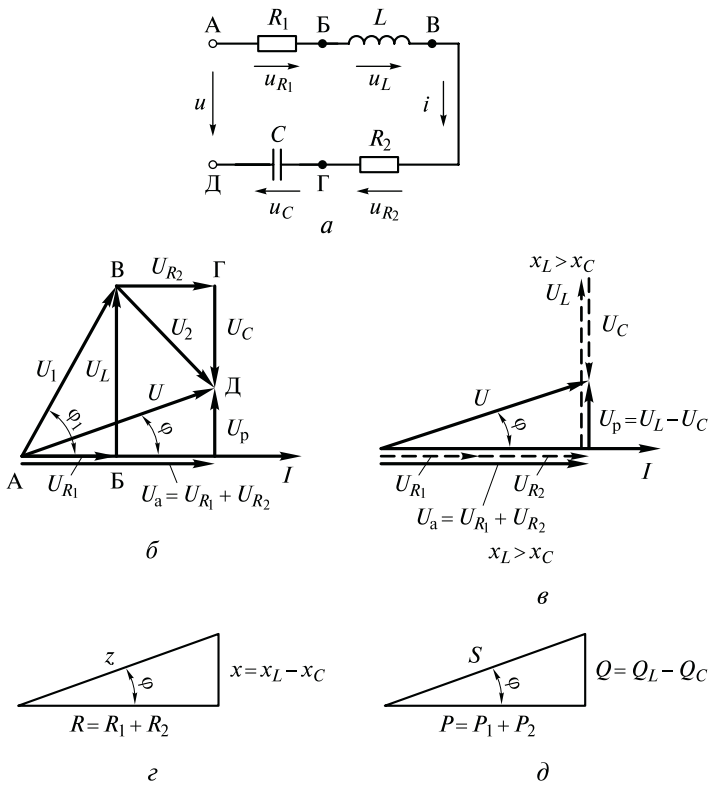


Рис. 9.9. Последовательное соединение катушки индуктивности и конденсатора при $x_L > x_C$:
 а — схема замещения; б — векторная диаграмма; в — треугольник напряжений;
 г — треугольник сопротивлений; д — треугольник мощностей

там цепи протекает один и тот же ток, то вектор тока удобно принять за основание векторной диаграммы. Тогда векторы напряжений направлены под углами сдвига фаз относительно вектора тока. Так как начальная фаза тока задана равной нулю ($\psi_I = 0$), то вектор тока в момент начала отсчета времени ($t = 0$) совпадает с положительным направлением оси абсцисс, которую для удобства располагаем горизонтально.

Длины слагаемых векторов в выбранном масштабе по напряжению:

$$U_{R_1} = R_1 I; U_L = x_L I; U_{R_2} = R_2 I; U_C = x_C I.$$

Векторы напряжений на сопротивлениях R_1 и R_2 совпадают по фазе с током, следовательно, $\varphi_{R_1} = \varphi_{R_2} = 0$. Вектор напряжения на

индуктивности опережает ток на угол $\varphi_L = \pi/2$, а вектор напряжения на емкости отстает от вектора тока на угол $\varphi_C = -\pi/2$.

Общее напряжение получим как геометрическую сумму векторов:

$$\bar{U} = \bar{U}_{R_1} + \bar{U}_L + \bar{U}_{R_2} + \bar{U}_C.$$

В зависимости от соотношения реактивных сопротивлений можно получить три варианта векторных диаграмм. Соотношение реактивных сопротивлений определяет характер цепи и физические процессы, протекающие в ней. Рассмотрим эти варианты.

Режимы работы неразветвленной RLC-цепи. Режим работы при $x_L > x_C$. Векторная диаграмма для этого случая представлена на рис. 9.9, б. На ней общее напряжение определяется как геометрическая сумма векторов на активных и реактивных участках:

$$\bar{U} = \bar{U}_{R_1} + \bar{U}_L + \bar{U}_{R_2} + \bar{U}_C,$$

или как геометрическая сумма векторов общих напряжений на катушке и конденсаторе:

$$\bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2.$$

Из диаграммы видно, что вектор \bar{U} является гипотенузой прямоугольного треугольника, катетами которого являются:

$$\bar{U}_a = \bar{U}_{R_1} + \bar{U}_{R_2}; \quad \bar{U}_p = \bar{U}_L + \bar{U}_C.$$

Таким образом, общее напряжение может быть получено как геометрическая сумма его активной U_a и реактивной U_p составляющих:

$$\bar{U} = \bar{U}_a + \bar{U}_p.$$

Тогда векторная диаграмма может быть представлена в виде, *треугольника напряжений* (рис. 9.9, в). При этом активная составляющая

$$U_a = U_{R_1} + U_{R_2},$$

так как векторы напряжений на активных элементах цепи направлены по одной прямой и в одну сторону. Реактивная составляющая

$$U_p = U_L - U_C,$$

так как векторы напряжений на реактивных элементах цепи направлены по одной прямой, но в разные стороны, причем $U_L > U_C$.

Из треугольника напряжений следует:

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = \sqrt{(U_{R_1} + U_{R_2})^2 + (U_L - U_C)^2}. \quad (9.64)$$

Общее напряжение u опережает ток i на угол φ — угол сдвига фаз между напряжением и током:

$$\varphi = \arctg \frac{U_p}{U_a} = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_{R_1} + U_{R_2}}. \quad (9.65)$$

При этом цепь имеет активно-индуктивный характер. Начальная фаза напряжения положительна: $\psi_U = \varphi > 0$.

Уравнение мгновенного значения общего напряжения цепи имеет следующий вид:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_U) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi), \quad (9.66)$$

где U и φ определяются выражениями (9.64) и (9.65).

Разделив все стороны треугольника напряжений (см. рис. 9.9, в) на одинаковое для всех элементов цепи действующее значение тока I , получим *треугольник сопротивлений* (рис. 9.9, г) и выражения, отражающие закон Ома в действующих значениях:

полное сопротивление цепи

$$z = \frac{U}{I}; \quad (9.67)$$

активное сопротивление цепи

$$R = \frac{U_{R_1} + U_{R_2}}{I} = R_1 + R_2; \quad (9.68)$$

реактивное сопротивление цепи

$$x = \frac{U_L - U_C}{I} = x_L - x_C. \quad (9.69)$$

Из треугольника сопротивлений следует:

$$z = \sqrt{R^2 + x^2} = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (x_L - x_C)^2}. \quad (9.70)$$

Следует обратить особое внимание на то, что общее сопротивление в неразветвленной цепи переменного тока не равно простой арифметической сумме сопротивлений отдельных участков цепи, как в неразветвленной цепи постоянного тока.

Умножив все стороны треугольника напряжений (см. рис. 9.9, в) на одинаковое для всех элементов цепи действующее значение тока I , получим *треугольник мощностей* (рис. 9.9, д) и выражения для мощностей:

полная мощность цепи

$$S = UI = I^2 z; \quad (9.71)$$

активная мощность цепи

$$P = (U_{R_1} + U_{R_2})I = P_1 + P_2 = I^2(R_1 + R_2); \quad (9.72)$$

реактивная мощность цепи

$$\begin{aligned} Q &= (U_L - U_C)I = Q_L - Q_C = I^2 x_L - I^2 x_C = \\ &= I^2(x_L - x_C) = I^2 x. \end{aligned} \quad (9.73)$$

Из треугольника мощностей следует, что полная мощность:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2}. \quad (9.74)$$

Все электрические величины цепи связаны между собой тригонометрическими функциями фазового угла, одинакового для треугольников напряжений, сопротивлений и мощностей:

$$\cos \varphi = \frac{U_a}{U} = \frac{R}{z} = \frac{P}{S}; \quad (9.75)$$

$$\sin \varphi = \frac{U_p}{U} = \frac{U_L - U_C}{U} = \frac{x_L - x_C}{z} = \frac{x}{z} = \frac{Q_L - Q_C}{S} = \frac{Q}{S}; \quad (9.76)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_p}{U_a} = \frac{U_L - U_C}{U_{R_1} + U_{R_2}} = \frac{x_L - x_C}{R_1 + R_2} = \frac{x}{R} = \frac{Q}{P} = \frac{Q_L - Q_C}{P}. \quad (9.77)$$

Режим работы при $x_L < x_C$. В этом случае напряжение $U_C > U_L$. Векторная диаграмма, соответствующая этому случаю, представлена на рис. 9.10, а.

Для рассматриваемого случая справедливы все формулы, приведенные для случая $x_L > x_C$ после перемены знаков в формулах реактивных составляющих напряжения, сопротивления и мощности:

$$U_p = U_C - U_L; \quad x = x_C - x_L; \quad Q = Q_C - Q_L. \quad (9.78)$$

Общее напряжение u отстает от тока i на угол φ — угол сдвига фаз между напряжением и током:

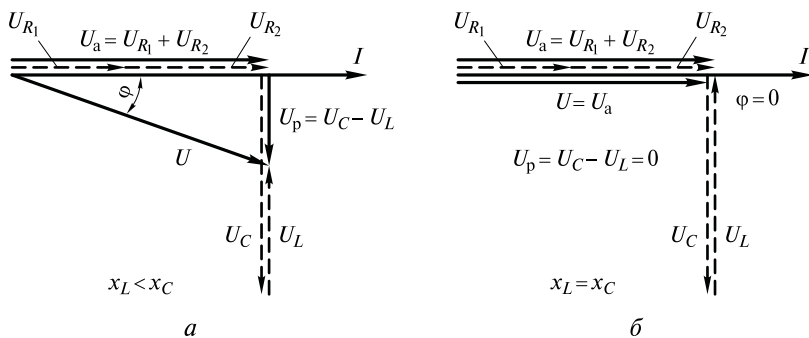


Рис. 9.10. Векторные диаграммы неразветвленной RLC -цепи:

$a - x_L < x_C$; $b - x_L = x_C$

$$\varphi = \arctg \frac{U_p}{U_a} = \arctg \frac{U_C - U_L}{U_{R_1} + U_{R_2}}. \quad (9.79)$$

При этом цепь имеет активно-емкостный характер. Начальная фаза напряжения отрицательна: $\psi_U = -\varphi < 0$.

Уравнение мгновенного значения общего напряжения цепи имеет следующий вид:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_U) = U\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi). \quad (9.80)$$

Режим работы при $x_L = x_C$. Векторная диаграмма для этого случая представлена на рис. 9.10, б. Из равенства реактивных сопротивлений (индуктивного и емкостного) следует, что $U_C = U_L$, а также:

$$U_p = U_C - U_L = 0; \quad x = x_C - x_L = 0; \quad Q = Q_C - Q_L = 0;$$

$$U = U_a; \quad z = R; \quad S = P; \quad \cos \varphi = 1. \quad (9.81)$$

Общее напряжение u совпадает с током i по фазе: $\varphi = 0$. При этом цепь имеет активный характер. Начальная фаза напряжения равна нулю: $\psi_U = \varphi = 0$.

Уравнение мгновенного значения общего напряжения цепи имеет следующий вид:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_U) = U_a \sqrt{2} \sin \omega t. \quad (9.82)$$

На рис. 9.11 представлены волновые диаграммы тока, напряжений и мощностей, наглядно демонстрирующие особенности режима работы RLC -цепи при $x_L = x_C$.

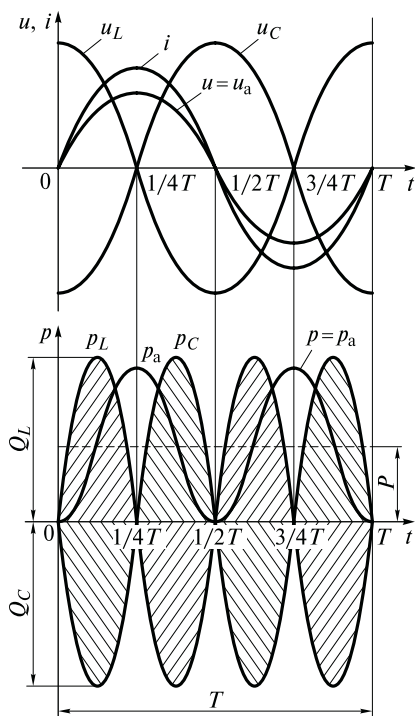


Рис. 9.11. Графики напряжений, тока и мгновенных мощностей в цепи последовательного соединения катушки и конденсатора при $x_L = x_C$

Режим работы неразветвленной RLC -цепи, который возникает при равенстве реактивных сопротивлений ($x_L = x_C$), называется *резонансом напряжений*. Этот режим имеет, помимо представленных, еще ряд очень важных особенностей, которые рассматриваются в подразд. 9.10.

Топографическая диаграмма. Векторная диаграмма, построенная в соответствии с чередованием элементов цепи, называется *топографической*, так как точки соединения векторов друг с другом соответствуют точкам соединения элементов схемы. Другими словами, каждой точке электрической цепи соответствует определенная точка на векторной диаграмме.

На такой диаграмме отрезок, соединяющий любые две точки, соответствует напряжению между теми же точками цепи. Таким образом, проведя вектор на векторной диаграмме между двумя точками с теми же обозначениями, можно определить напряжение между ними.

Например, напряжение U_1 между точками цепи, обозначенными на схеме, приведенной на рис. 9.9, *a*, точками А и В, выражается вектором, направленным из точки А в точку В диаграммы. Напряжение U_2 между точками цепи, обозначенными на схеме точками В и Д, выражается вектором, направленным из точки В

в точку Д диаграммы. Вектор, проведенный из точки А в точку Д, соответствует общему напряжению рассматриваемой цепи и т. д. Соответствующее напряжение определяется как длина вектора, умноженная на масштаб напряжения.

9.7. Параллельное соединение катушки индуктивности и конденсатора

Напряжение и токи в цепи. Пусть цепь (рис. 9.12, а) с двумя параллельными ветвями, в одной из которых включена катушка индуктивности, а во второй — конденсатор, подключена к источнику синусоидального напряжения:

$$u = U_m \sin \omega t.$$

Рассчитаем токи при известных параметрах цепи.

Расчет тока в первой параллельной ветви. Первая ветвь — катушка индуктивности с потерями, представленная последовательным соединением активного сопротивления R_1 и индуктивности L .

Начальная фаза напряжения источника равна нулю ($\psi_U = 0$), т. е. вектор напряжения совпадает с началом отсчета. В цепи, имеющей активно-индуктивный характер, ток отстает от напряжения на выводах цепи на угол $\varphi_1 < 90^\circ$ (см. подразд. 9.4). Поэтому начальная фаза тока i_1

$$\psi_{I_1} = \psi_U - \varphi_1 = -\varphi_1.$$

Амплитуда тока i_1

$$I_{m1} = U_m / z_{11}.$$

Таким образом, уравнение мгновенного значения тока

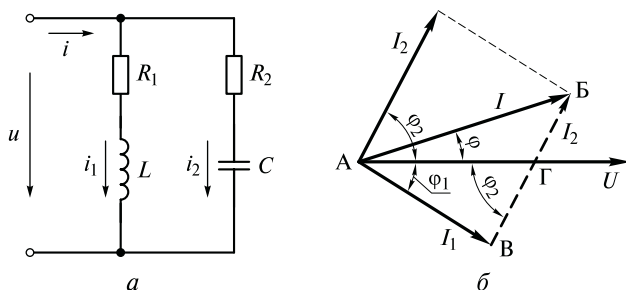


Рис. 9.12. Параллельное соединение катушки индуктивности и конденсатора при замещении их последовательными схемами:

а — схема цепи; б — векторная диаграмма цепи

$$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) = \frac{U_m}{z_1} \sin(\omega t - \varphi_1),$$

где z_1 — полное сопротивление первой ветви, $z_1 = \sqrt{R_1^2 + x_L^2}$; φ_1 —

угол сдвига фаз, $\varphi_1 = \arctg \frac{x_L}{R_1} = \arctg \frac{2\pi fL}{R_1}$.

Действующее значение тока i_1

$$I_1 = I_{m1} / \sqrt{2} = U / z_1.$$

Ток во второй параллельной ветви. Вторая ветвь — конденсатор с потерями, представленный последовательным соединением активного сопротивления R_2 и емкости C .

В цепи, имеющей активно-емкостный характер, ток опережает напряжение на выводах цепи на угол $\varphi_2 < 90^\circ$ (см. подразд. 9.5), следовательно, имеет начальную фазу

$$\psi_2 = \psi_U + \varphi_2 = \varphi_2.$$

Амплитуда тока i_2

$$I_{m2} = U_m / z_2.$$

Таким образом, уравнение мгновенного значения тока i_2

$$i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_2) = \frac{U_m}{z_2} \sin(\omega t + \varphi_2),$$

где z_2 — полное сопротивление второй ветви, $z_2 = \sqrt{R_2^2 + x_C^2}$; φ_2 —

угол сдвига фаз, $\varphi_2 = \arctg \frac{x_C}{R_2} = \arctg \frac{1}{2\pi fCR_2}$.

Действующее значение тока i_2

$$I_2 = I_{m2} / \sqrt{2} = U / z_2.$$

Общий ток в неразветвленной части цепи. По первому закону Кирхгофа мгновенное значение общего тока

$$i = i_1 + i_2 = I_{m1} \sin(\omega t - \varphi_1) + I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Общий ток, являясь суммой синусоидальных токов, также синусоидальный:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_I) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_I).$$

Для определения действующего значения общего тока i и его начальной фазы ψ_I построим векторную диаграмму (рис. 9.12, б). Так как напряжение источника — общая для всех параллельных ветвей величина, то его вектор является *основанием векторной диаграммы*, относительно которого строятся векторы токов. Векторы токов I_1 и I_2 построены под углами начальных фаз $\psi_1 = -\varphi_1$ и $\psi_2 = \varphi_2$ относительно вектора напряжения U . Вектор общего тока определяется как геометрическая сумма векторов I_1 и I_2 .

Действующее значение общего тока I является одной из сторон треугольника АБВ, двумя другими сторонами которого являются токи I_1 и I_2 . Зная значения двух сторон треугольника и значение угла В между ними, по известной из тригонометрии теореме можно найти длину третьей, неизвестной, стороны. Таким образом,

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2 \cos B.$$

Из треугольника АВГ векторной диаграммы (см. рис. 9.12, б) следует:

$$B = 180^\circ - \varphi_1 - \varphi_2 = 180^\circ - (\varphi_1 + \varphi_2).$$

Так как $\cos(180^\circ - (\varphi_1 + \varphi_2)) = -\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$, то действующее значение общего тока i для рассматриваемой цепи

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (9.83)$$

Тангенс угла начальной фазы ψ_I общего тока определяется в соответствии с векторной диаграммой (см. рис. 9.12, б):

$$\operatorname{tg} \psi_I = \frac{I_2 \sin \varphi_2 - I_1 \sin \varphi_1}{I_2 \cos \varphi_2 + I_1 \cos \varphi_1}. \quad (9.84)$$

Начальная фаза ψ_I общего тока i (тока в неразветвленной части цепи) в общем случае может быть положительной, отрицательной или нулевой в зависимости от значений параметров цепи (R_1 , R_2 , L , C). Угол ψ_I имеет положительное значение, когда $I_2 \sin \varphi_2 > I_1 \sin \varphi_1$, в противном случае — отрицательное значение. Когда $I_2 \sin \varphi_2 = I_1 \sin \varphi_1$, начальная фаза $\psi_I = 0$.

Таким образом, в разветвленной RLC -цепи с двумя ветвями в зависимости от значений параметров цепи (R_1 , R_2 , L , C) можно получить три режима работы, соответствующие трем значениям угла ψ_I : активно-емкостный ($\psi_I > 0$), активно-индуктивный ($\psi_I < 0$) и активный (так называемый «резонанс токов»), когда $\psi_I = 0$.

Угол сдвига фаз φ между током I и напряжением U : $\varphi = |\psi_I|$.

Общее сопротивление цепи определяется по закону Ома:

$$z = \frac{U}{I}.$$

Мощности цепи:

активные мощности первой и второй ветвей и всей цепи:

$$P_1 = UI_1 \cos \varphi_1; P_2 = UI_2 \cos \varphi_2; P = UI \cos \varphi;$$

реактивные мощности первой и второй ветвей и всей цепи:

$$Q_1 = UI_1 \sin \varphi_1; Q_2 = UI_2 \sin \varphi_2; Q = UI \sin \varphi;$$

полные мощности ветвей и всей цепи:

$$S_1 = UI_1; S_2 = UI_2; S = UI.$$

9.8. Метод проводимостей для расчета цепей с параллельным соединением ветвей

Проводимости цепи. Схему цепи (см. рис. 9.12, а) заменим *эквивалентной схемой замещения*, в которой и катушка индуктивности, и конденсатор представлены параллельным соединением элементов (рис. 9.13, а). При таком представлении все элементы схемы соединены параллельно, что дает возможность упростить расчет.

Замена будет эквивалентной, если при том же заданном напряжении источника $u = U_m \sin \omega t$ и тех же заданных параметрах цепи (R_1, R_2, L, C) токи в цепи (i, i_1, i_2) останутся прежними.

Таким образом, при эквивалентной замене сохраняются в прежнем виде значения углов сдвига фаз (φ_1, φ_2 и φ) и векторная диаграмма цепи (рис. 9.13, в).

Следовательно, справедливы выражения (9.37)...(9.39) и (9.53)...(9.55):

$$I_1 = U/z_1; \cos \varphi_1 = R_1/z_1; \sin \varphi_1 = x_L/z_1;$$

$$I_2 = U/z_2; \cos \varphi_2 = R_2/z_2; \sin \varphi_2 = x_C/z_2.$$

Разложим каждый ток векторной диаграммы цепи (см. рис. 9.13, в) на две взаимно-перпендикулярные составляющие и определим их, для чего из конца вектора тока опустим перпендикуляр на вектор напряжения.

Активная проводимость ветви. Проекцию вектора тока на направление вектора напряжения называют *активной составляющей вектора тока* и обозначают I_a .

Активная составляющая первого тока

$$I_{a1} = I_1 \cos \varphi_1 = \frac{U}{z_1} \frac{R_1}{z_1} = U \frac{R_1}{z_1^2} = U g_1,$$

где g_1 — активная проводимость первой ветви, $g_1 = \frac{R_1}{z_1^2}$.

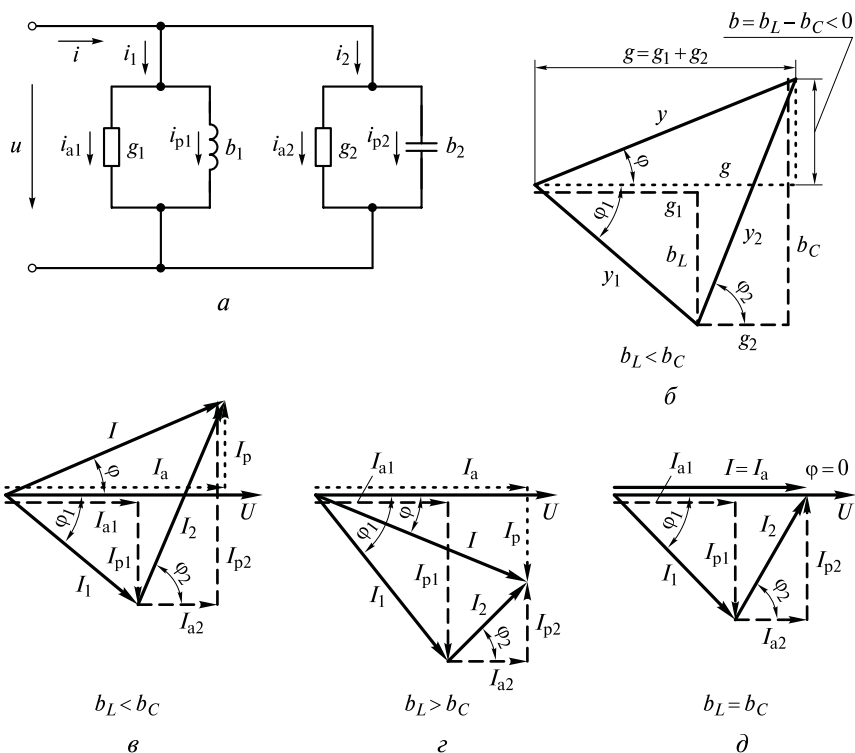


Рис. 9.13. Параллельное соединение катушки индуктивности и конденсатора при замещении их параллельными схемами:

a — схема цепи; *б* — треугольники проводимостей; *в*...*д* — векторные диаграммы цепи

Активная составляющая второго тока

$$I_{a2} = I_2 \cos \varphi_2 = \frac{U}{z_2} \frac{R_2}{z_2} = U \frac{R_2}{z_2^2} = U g_2,$$

где g_2 — активная проводимость второй ветви, $g_2 = \frac{R_2}{z_2^2}$.

Активная проводимость любой произвольной ветви g_B (в общем случае) вычисляется по аналогичной формуле — это отношение общего активного сопротивления ветви к квадрату полного сопротивления ветви:

$$g_B = \frac{R_B}{z_B^2}. \tag{9.85}$$

Активная составляющая тока ветви

$$I_{a.b} = Ug_b. \quad (9.86)$$

Реактивная проводимость ветви. Проекция вектора тока на направление, перпендикулярное вектору напряжения, называется реактивной составляющей вектора тока и обозначается I_p .

Реактивная составляющая первого тока

$$I_{p1} = I_1 \sin \varphi_1 = \frac{U}{z_1} \frac{x_L}{z_1} = U \frac{x_L}{z_1^2} = Ub_L,$$

где b_L — реактивная проводимость первой ветви, $b_L = \frac{x_L}{z_1^2}$.

Реактивная составляющая второго тока

$$I_{p2} = I_2 \sin \varphi_2 = \frac{U}{z_2} \frac{x_C}{z_2} = U \frac{x_C}{z_2^2} = Ub_C,$$

где b_C — реактивная проводимость второй ветви, $b_C = \frac{x_C}{z_2^2}$.

Реактивная проводимость произвольной ветви b_b (в общем случае) вычисляется по аналогичной формуле

$$b_b = \frac{x_b}{z_b^2}. \quad (9.87)$$

Реактивная проводимость равна отношению реактивного сопротивления ветви к квадрату полного сопротивления ветви.

Реактивная составляющая тока ветви

$$I_{p.b} = Ub_b. \quad (9.88)$$

Полная проводимость ветви. Вектор каждого тока и его составляющие образуют прямоугольный треугольник, который называется *треугольником токов*.

Стороны треугольников токов связаны отношениями:

$$I_1 = \sqrt{I_{a1}^2 + I_{p1}^2} = U\sqrt{g_1^2 + b_L^2}; \quad I_2 = \sqrt{I_{a2}^2 + I_{p2}^2} = U\sqrt{g_2^2 + b_C^2}. \quad (9.89)$$

Отношение тока участка цепи к напряжению на его концах называется *полной проводимостью* участка и обозначается y .

Таким образом,

$$y_1 = I_1/U; y_2 = I_2/U; y = I/U,$$

где y_1, y_2, y — полные проводимости первой и второй ветвей и всей цепи соответственно.

Согласно формулам (9.38) и (9.89) проводимости ветвей:

$$y_1 = \frac{1}{z_1} = \sqrt{g_1^2 + b_L^2}; y_2 = \frac{1}{z_2} = \sqrt{g_2^2 + b_C^2}.$$

Полная проводимость ветви y_B в общем случае

$$y_B = \frac{1}{z_B} = \sqrt{g_B^2 + b_B^2}. \quad (9.90)$$

Треугольник проводимостей. Разделив все стороны треугольника токов на значение напряжения U , получим подобный треугольник, стороны которого являются проводимостями (рис. 9.13, б). Такой треугольник называется *треугольником проводимостей*.

Стороны такого треугольника — скалярные (не векторные) величины, так как проводимости — величины постоянные, не зависящие от времени.

Углы сдвига фаз между напряжением \bar{U} и токами \bar{I}_1, \bar{I}_2 в ветвях можно определить из треугольников проводимостей (см. рис. 9.13, б) через тригонометрические функции углов:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= b_L/g_1; \sin \varphi_1 = b_L/y_1; \cos \varphi_1 = g_1/y_1; \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= b_C/g_2; \sin \varphi_2 = b_C/y_2; \cos \varphi_2 = g_2/y_2. \end{aligned} \quad (9.91)$$

Активная и реактивная проводимости цепи. Активная составляющая общего тока (см. рис. 9.13, в)

$$I_a = I_{a1} + I_{a2} = Ug_1 + Ug_2 = U(g_1 + g_2) = Ug,$$

где g — активная проводимость всей цепи, $g = g_1 + g_2$.

Активная проводимость всей цепи в общем случае

$$g = \sum g_i, \quad (9.92)$$

где i — номер ветви в параллельном соединении.

Реактивная составляющая общего тока

$$I_p = I_{p1} - I_{p2} = Ub_L - Ub_C = U(b_L - b_C) = Ub,$$

где b — реактивная проводимость всей цепи, $b = b_L - b_C$.

Реактивная проводимость всей цепи в общем случае

$$b = \sum_{\text{алг}} b_i, \quad (9.93)$$

где i — число ветвей в параллельном соединении.

Поскольку векторы реактивных составляющих токов (перпендикулярные вектору напряжения) направлены в противоположные стороны и, следовательно, при сложении вычитаются, то и реактивные проводимости записываются с разными знаками. При этом индуктивные проводимости записываются со знаком «+», а емкостные — со знаком «-».

Общий ток и полная проводимость цепи. Общий ток определим из треугольника общего тока (см. рис. 9.13, в):

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{(Ug)^2 + (Ub)^2} = U\sqrt{g^2 + b^2} = Uy, \quad (9.94)$$

где y — полная проводимость цепи (см. рис. 9.13, б).

Полная проводимость определяется по формуле

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = \frac{1}{z}. \quad (9.95)$$

Для всей цепи, как и для отдельной ветви, согласно формулам (9.85) и (9.87) справедливы выражения:

$$g = R/z^2 = Ry^2 \text{ и } b = x/z^2 = xy^2. \quad (9.96)$$

Угол фазового сдвига φ напряжения \bar{U} относительно общего тока \bar{I} определяется через тригонометрические функции общего треугольника проводимостей:

$$\operatorname{tg} \varphi = b/g; \quad \sin \varphi = b/y. \quad (9.97)$$

Режимы работы параллельной RLC -цепи. В зависимости от соотношения индуктивных и емкостных реактивных проводимостей ветвей в цепи возможны три режима работы параллельной RLC -цепи (см. рис. 9.13, в... д).

Режим работы при $b_L < b_C$. Векторная диаграмма изображена на рис. 9.13, в. Угол φ сдвига напряжения относительно общего тока согласно формуле (9.97) отрицательный. При этом общий ток опережает напряжение цепи на угол, меньший 90° . Цепь имеет активно-емкостный характер: $0 > \varphi > -90^\circ$.

Режим работы при $b_L > b_C$. Векторная диаграмма изображена на рис. 9.13, г. Угол сдвига напряжения относительно общего тока согласно формуле (9.97) положительный. При этом общий

ток отстает от напряжения цепи на угол, меньший 90° . Цепь имеет активно-индуктивный характер: $0 < \varphi < 90^\circ$.

Режим работы при $b_L = b_C$. Векторная диаграмма изображена на рис. 9.13, д. При этом общий ток совпадает по фазе с напряжением цепи ($\varphi = 0$) и равен активной составляющей тока.

Этот режим представляет особенный интерес для электротехнической практики и носит название *резонанс токов*, о нем подробнее рассказано в подразд. 9.9.

Мощность цепи определяется из *треугольника мощностей*, который получается путем умножения треугольника токов на действующее значение напряжения U . Стороны треугольника мощностей — скалярные величины.

Активная мощность цепи

$$P = UI \cos \varphi = UI \frac{g}{y} = UIz g = U^2 g. \quad (9.98)$$

Реактивная мощность цепи

$$Q = UI \sin \varphi = UI \frac{b}{y} = UIz b = U^2 b. \quad (9.99)$$

Полная мощность цепи

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} = U^2 \sqrt{g^2 + b^2} = U^2 y. \quad (9.100)$$

Расчет цепей методом проводимостей. Метод проводимостей позволяет значительно упростить расчет режимов работы параллельной цепи. Метод применим для цепей, содержащих произвольное число приемников, соединенных параллельно.

Порядок расчета при заданном напряжении цепи и ее параметрах следующий:

- определяем полное сопротивление (z_i) каждой i -й ветви заданной цепи согласно формуле (9.70);
- рассчитываем активные проводимости ветвей согласно формуле (9.85) и общую активную проводимость всей цепи согласно формуле (9.92);
- рассчитываем реактивные проводимости ветвей согласно формуле (9.87) и общую реактивную проводимость всей цепи согласно формуле (9.93);
- определяем полные проводимости ветвей и всей цепи согласно формулам (9.90) и (9.95);
- определяем токи в ветвях и во всей цепи согласно формулам (9.89) и (9.94) и т. д.

9.9. Резонанс в электрических цепях

Резонанс (отзвук, отголосок) — явление сильного возрастания амплитуды колебаний (электрических, механических, звуковых и т.д.) под влиянием внешних воздействий, когда частота собственных колебаний системы совпадает с частотой колебаний внешнего воздействия.

Наиболее простые электрические цепи, в которых возможен резонанс, состоят из катушки индуктивности и конденсатора, соединенных последовательно (резонанс напряжений) или параллельно (резонанс токов).

Резонанс напряжений. *Резонансом напряжений* называется режим электрической цепи при последовательном соединении участков с индуктивностью и емкостью, характеризующийся равенством индуктивного и емкостного сопротивлений ($x_L = x_C$).

Схема последовательного контура представлена на рис. 9.14, а. Это цепь, в которой последовательно соединены элементы с активным сопротивлением R и идеальные (без потерь) катушка индуктивности L и конденсатор C .

Основные соотношения между величинами, характеризующими режимы работы неразветвленной RLC -цепи, и энергетические процессы в ней были рассмотрены в подразд. 9.6. Известно, что в такой цепи возможны три режима работы в зависимости от соотношения между сопротивлениями: индуктивным x_L и емкостным x_C (см. рис. 9.9 и 9.10).

Способы получения резонанса напряжений. Условие получения резонанса напряжений — равенство реактивных сопротивлений цепи:

$$x_L = x_C, \text{ или } \omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

Оно может быть достигнуто двумя путями: изменением параметров L и C (одного из них или обоих вместе) при постоянной частоте источника энергии или изменением частоты источника при постоянных параметрах L и C .

Резонансная частота. В неразветвленной RLC -цепи *резонансная частота* ω_p — это частота, при которой реактивные сопротивления равны между собой:

$$x_{Lp} = x_{Cp}; \quad \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C},$$

откуда

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (9.101)$$

Полученное выражение для резонансной частоты совпадает с формулой для вычисления угловой частоты собственных колебаний ω_0 в контуре без потерь: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Частотные характеристики неразветвленной RLC -цепи. Реактивные сопротивления x_L и x_C зависят от частоты источника питания ω :

$$x_L = \omega L; \quad x_C = \frac{1}{\omega C}; \quad z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}.$$

Графики зависимости сопротивлений от частоты ω называются *частотными характеристиками*. Они имеют вид, приведенный на рис. 9.14, б.

При увеличении частоты сопротивление x_L увеличивается пропорционально частоте ω , а x_C уменьшается по закону обратной пропорциональности. Полное сопротивление цепи z при резонансной частоте ω_p оказывается наименьшим, равным активному со-

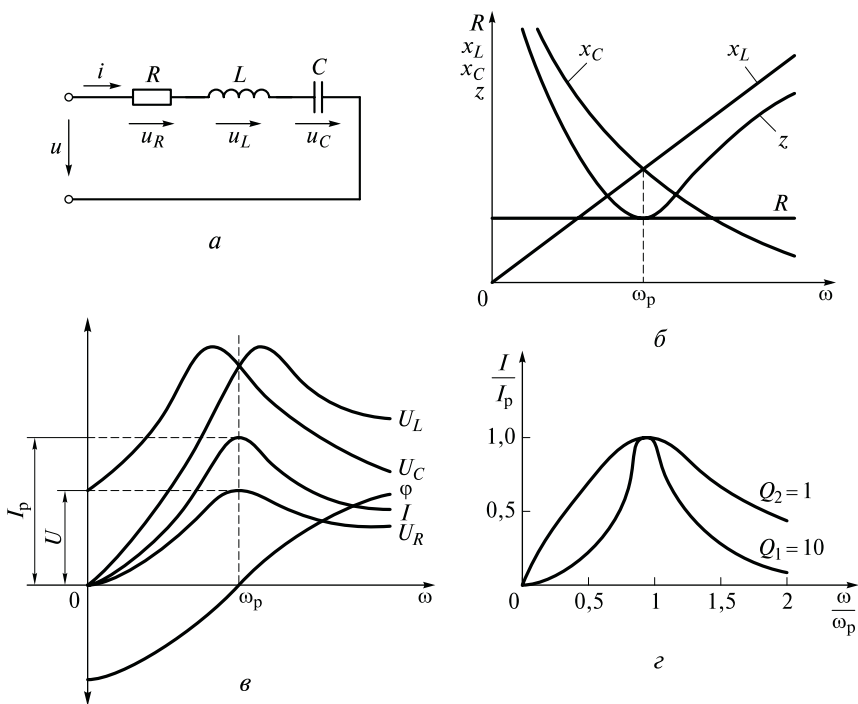


Рис. 9.14. Резонанс напряжений:

а — последовательный контур; б — частотные характеристики; в — резонансные кривые; г — влияние добротности на вид резонансных кривых

противлению R . При частотах $\omega < \omega_p$ полное сопротивление увеличивается с уменьшением частоты за счет увеличения разности $(x_C - x_L)$; при частотах $\omega > \omega_p$ полное сопротивление растет с увеличением частоты за счет увеличения разности $(x_L - x_C)$.

Резонансные кривые. Большой практический интерес представляют зависимости напряжений и токов на отдельных элементах цепи от частоты.

Эти зависимости называются *резонансными кривыми* (рис. 9.14, в).

Характер изменения тока от частоты определяется зависимостью полного сопротивления от частоты (см. рис. 9.14, б). При $\omega = 0$ ток равен нулю, далее с увеличением частоты ток увеличивается и при $\omega = \omega_p$ достигает максимума I_p . Дальнейшее увеличение частоты ведет к постепенному уменьшению тока до нуля при $\omega = \infty$.

Напряжение на активном сопротивлении U_R изменяется аналогично току, так как $U_R = IR$.

Напряжение на конденсаторе U_C при $\omega = 0$ равно напряжению на зажимах источника U , так как сопротивление конденсатора $x_C = \infty$, что соответствует обрыву цепи между обкладками конденсатора, которые через элементы цепи подключены к клеммам источника питания. С ростом частоты U_C увеличивается, достигая наибольшего значения при частоте, несколько меньшей, чем резонансная частота, и далее уменьшается до нуля при частоте $\omega = \infty$.

Напряжение на индуктивности $U_L = 0$ при частоте $\omega = 0$, так как сопротивление $x_L = 0$. Увеличение частоты ведет к увеличению U_L , которое при частоте, несколько большей, чем резонансная частота, достигает максимума, а затем уменьшается до значения напряжения источника при частоте $\omega = \infty$, когда сопротивление $x_L = \infty$, что соответствует разрыву цепи на зажимах катушки.

Угол сдвига фаз в цепи при частотах, меньших резонансной частоты ω_p согласно формуле (9.65) отрицательный. Уменьшаясь с увеличением частоты (из-за уменьшения разности U_C и U_L), угол сдвига фаз становится равным нулю при резонансе ($\varphi_p = 0$), а затем изменяет знак и увеличивается при дальнейшем увеличении частоты.

Особенности режима резонанса напряжений. Напряжения на индуктивности и емкости, равные между собой в режиме резонанса, могут значительно превышать напряжение источника питания.

Можно показать, что при резонансе напряжений отношение напряжения на индуктивности или емкости к напряжению, приложенному к цепи (напряжению источника), равно отношению волнового сопротивления $z_c = \sqrt{L/C}$ к активному сопротивлению R .

Действительно, в режиме резонанса сопротивления реактивных элементов равны волновому сопротивлению:

$$\omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} = \frac{\sqrt{LC}}{\sqrt{C}\sqrt{C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = z_c.$$

Поэтому

$$U_{Lp} = U_{Cp} = I_p z_c = \frac{U}{R} z_c;$$

$$\frac{U_{Cp}}{U} = \frac{U_{Lp}}{U} = \frac{z_c}{R}. \quad (9.102)$$

Из этого выражения следует, что при $z_c > R$ напряжение на реактивных элементах больше напряжения источника. Такое превышение может оказаться значительным, если волновое сопротивление цепи много больше активного.

Добротность контура. Качество резонансного контура считается тем выше, чем больше отношение $\frac{z_c}{R}$, которое получило название *добротности последовательного контура* Q .

Таким образом, добротность контура показывает, во сколько раз напряжения на индуктивности и емкости в режиме резонанса напряжений превышают напряжение источника питания.

Добротность последовательного контура

$$Q = \frac{z_c}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\omega_p L}{R} = \frac{1}{\omega_p RC}. \quad (9.103)$$

Чем меньше мощность потерь энергии в контуре, т. е. чем меньше значение активного сопротивления цепи R , тем больше добротность контура. Чем больше значение добротности, тем больше значение тока при резонансе I_p и тем более острый характер имеет резонансная кривая, приведенная на рис. 9.14, *г*. Для удобства на рис. 9.14, *г* оси проградуированы в относительных единицах:

$$\frac{I}{I_p} \text{ и } \frac{\omega}{\omega_p}.$$

Резонанс напряжений в контуре с потерями. Все рассуждения о резонансе напряжений в идеализированной

цепи можно распространить и на цепи, содержащие последовательное соединение катушки индуктивности и конденсатора с потерями. Активные сопротивления катушки и конденсатора можно рассматривать как часть общего активного сопротивления цепи R , тогда схема (см. рис. 9.14, а) соответствует схеме замещения цепи для случая катушки индуктивности и конденсатора с потерями.

Резонанс напряжений используется на практике для усиления сигналов, измерений параметров цепи или частоты.

Однако резонанс напряжений может оказаться опасным в установках с большими токами, если не предусмотрены специальные меры безопасности. Если волновое сопротивление цепи много больше активного, на конденсаторах и катушках индуктивности возможны значительные перенапряжения, и изоляция катушки или конденсатора может быть пробита. Это необходимо учитывать с точки зрения безаварийной работы устройств и безопасности лиц, обслуживающих эти устройства. На практике подобный случай возможен, например, когда на конце кабельной линии включен приемник, обладающий индуктивностью.

Резонанс токов. Режим электрической цепи при параллельном соединении участков с индуктивностью и емкостью, характеризующийся равенством индуктивной и емкостной проводимостей ($b_L = b_C$), называется *резонансом токов*.

Этот режим рассмотрим для цепи, приведенной на рис. 9.15, а. В этой цепи параллельно включены элементы с активным сопротивлением R и идеальные (без потерь) катушка индуктивности L и конденсатор C .

Основные соотношения между величинами, характеризующими режим работы разветвленной RLC -цепи, рассмотрены в подразд. 9.7.

Для рассматриваемой цепи активная проводимость

$$g = \frac{1}{R}.$$

Реактивные проводимости зависят от частоты питающей сети (частоты вынужденных колебаний):

$$b_L = \frac{1}{\omega L}; \quad b_C = \omega C.$$

Векторная диаграмма параллельного контура с катушкой индуктивности и конденсатором без потерь в режиме резонанса представлена на рис. 9.15, б.

Резонансная частота ω_p при резонансе токов — это частота, при которой реактивные проводимости равны: $b_L = b_C$.

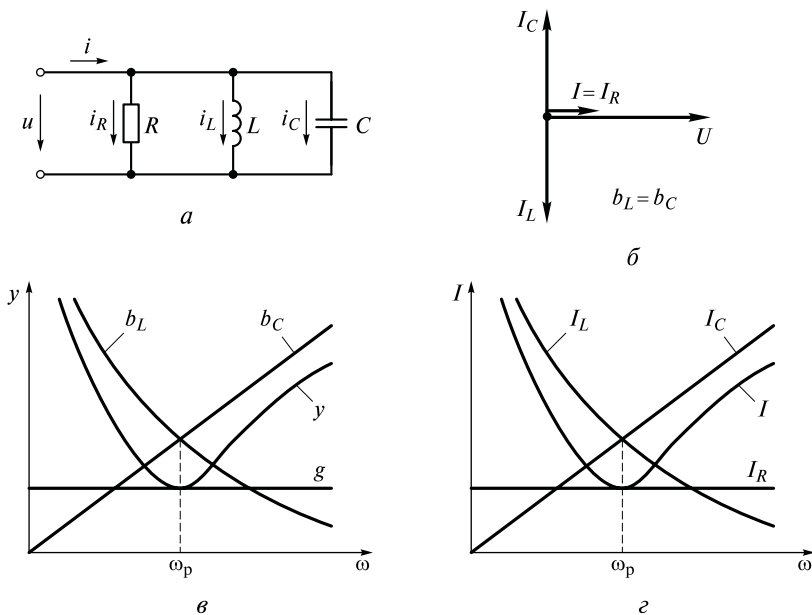


Рис. 9.15. Резонанс токов:

a — параллельный контур; *б* — векторная диаграмма контура в режиме резонанса; *в* — частотные характеристики; *г* — резонансные кривые

Следовательно,

$$\frac{1}{\omega_p L} = \omega_p C,$$

откуда

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Полученное выражение для резонансной частоты совпадает с формулой для вычисления частоты собственных колебаний ω_0 в контуре без потерь, и формулой (9.101), полученной при рассмотрении резонанса напряжений.

Способы получения резонанса токов. Резонанс токов так же, как и резонанс напряжений, можно получить изменением параметров L и C или изменением частоты источника энергии до достижения равенства реактивных проводимостей в цепи:

$$b_L = b_C, \text{ или } \frac{1}{\omega L} = \omega C.$$

Частотные характеристики разветвленной RLC -цепи. На рис. 9.15, *в* показаны зависимости проводимостей от частоты. Полная проводимость цепи y при резонансной частоте ω_p в соответствии с формулой (9.95) оказывается наименьшей, равной активной проводимости g , так как общая реактивная проводимость $b_p = b_{Lp} - b_{Cp} = 0$. При изменении частоты в обе стороны от резонансной частоты полная проводимость увеличивается за счет увеличения разности реактивных проводимостей $(b_L - b_C)$.

Резонансные кривые. Резонансные кривые параллельного контура представлены зависимостями токов на отдельных участках цепи от частоты источника питания (рис. 9.15, *з*).

При заданном напряжении источника питания общий ток в цепи I (см. формулу (9.94)) и токи в ветвях (I_R , I_L и I_C) согласно формулам (9.86) и (9.88) пропорциональны соответствующим проводимостям: y , g , b_L и b_C . Поэтому резонансные кривые токов по форме повторяют частотные характеристики соответствующих проводимостей. Например, кривая $I(\omega)$ по форме повторяет кривую $y(\omega)$, так как $I = Uy$.

Состояние резонанса токов характеризуется наименьшим значением общего тока в цепи ($I = I_R$) и равенством нулю угла сдвига фаз между напряжением и током.

Согласно формуле (9.97)

$$\varphi_p = b_p/g = (b_{Lp} - b_{Cp})/g = 0.$$

Особенности режима резонанса токов. В режиме резонанса токов в идеализированном контуре реактивные проводимости равны между собой $b_{Lp} = b_{Cp}$ и равны обратному характеристическому (волновому) сопротивлению цепи — *характеристической (волновой) проводимости цепи* y_c :

$$\frac{1}{\omega_p L} = \omega_p C = \frac{\sqrt{LC}}{L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{z_c} = y_c. \quad (9.104)$$

Реактивные составляющие токов при резонансе токов равны:

$$I_{Lp} = I_{Cp} = Uy_c.$$

Поэтому отношение токов катушки и конденсатора к общему току при резонансе токов

$$\frac{I_{Lp}}{I_p} = \frac{I_{Cp}}{I_p} = \frac{Uy_c}{Ug} = \frac{y_c}{g}, \quad (9.105)$$

т. е. равно отношению волновой проводимости y_c к активной проводимости цепи g .

При параллельном соединении элементов качество резонансной цепи считается тем выше, чем больше отношение y_c/g , которое, как и в последовательном контуре, называется *добротностью* Q .

При $g < y_c$ токи в ветвях с реактивными элементами в режиме резонанса ($I_{Lp} = I_{Cp}$) могут значительно превосходить общий ток I_p в неразветвленной части цепи. Таким образом, добротность контура показывает, во сколько раз токи на индуктивности и емкости в режиме резонанса токов превышают общий ток цепи.

Добротность параллельного контура

$$Q = \frac{y_c}{g} = \frac{\sqrt{\frac{C}{L}}}{g} = \frac{R}{\omega_p L} = \omega_p R C. \quad (9.106)$$

Чем больше значение R и соответственно меньше g , тем больше добротность Q и согласно формуле (9.98) меньше потери энергии в цепи.

Резонанс токов в контуре с потерями. Все рассуждения о резонансе токов в идеализированной цепи можно распространить и на цепи, содержащие параллельное соединение катушки индуктивности и конденсатора с потерями.

В справочниках принято измерять и задавать параметры последовательных схем замещения реальных катушек и конденсаторов: их активные сопротивления, индуктивности и емкости. Поэтому представим катушку индуктивности и конденсатор схемами с последовательным соединением активных и реактивных элементов (см. рис. 9.12, а).

Реактивные проводимости ветвей с катушкой индуктивности и конденсатором в этом случае согласно формуле (9.87):

$$b_L = \frac{x_L}{R_1^2 + x_L^2}; \quad b_C = \frac{x_C}{R_2^2 + x_C^2},$$

где R_1, R_2 — соответственно активные сопротивления катушки индуктивности и конденсатора с потерями.

Условие резонанса токов — равенство реактивных проводимостей обеих ветвей ($b_L = b_C$) — справедливо и в случае контура с потерями.

Приравняв реактивные проводимости, определим резонансную частоту в случае контура с потерями:

$$\frac{x_L}{R_1^2 + x_L^2} = \frac{x_C}{R_2^2 + x_C^2}, \quad \text{или} \quad \frac{\omega_p L}{R_1^2 + (\omega_p L)^2} = \frac{\frac{1}{\omega_p C}}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_p C}\right)^2}.$$

Откуда

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}. \quad (9.107)$$

Из уравнения (9.107) следует, что резонансная частота параллельного контура с потерями не равна резонансной частоте последовательного контура $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Она зависит от активных сопротивлений катушки и конденсатора.

В устройствах систем электроснабжения резонанс токов применяется для увеличения коэффициента мощности ($\cos\varphi$). Это достигается путем параллельного подключения батарей конденсаторов к индуктивной нагрузке сети.

9.10. Экономическое значение коэффициента мощности и методы его повышения

Впервые понятие о коэффициенте мощности $\cos\varphi$ было дано в подразд. 9.4, где было показано, что значение активной мощности цепи P (см. формулу (9.42)) в зависимости от значения $\cos\varphi$ может изменяться от нуля до максимального значения, равного произведению UI .

Экономическое значение коэффициента мощности $\cos\varphi$ состоит в том, что от его величины определенным образом зависят затраты на эксплуатацию и, следовательно, эффективность использования оборудования электрических установок.

Для выяснения влияния коэффициента мощности на экономические показатели электротехнических установок рассмотрим приемник энергии, работающий с постоянной активной мощностью P при постоянном напряжении U сети. Ток при этих условиях во всех элементах электрической цепи зависит от $\cos\varphi$ приемника:

$$P = UI \cos\varphi; \quad I = \frac{P}{U \cos\varphi}.$$

Мощность тепловых потерь P согласно формуле (9.11) пропорциональна квадрату тока I и сопротивлению проводов R :

$$P = I^2 R.$$

Чем меньше $\cos\varphi$ приемника, тем больший ток должен быть во всех элементах цепи, в том числе и в соединительных прово-

дах. Чем больше ток приемника, тем больше потери энергии в электрической цепи. Стоимость потерянной энергии входит в эксплуатационные расходы. И наоборот, при постоянной мощности приемника P и постоянном напряжении U сети увеличение $\cos \varphi$ вызывает уменьшение тока в цепи и потерь на нагревание, которые пропорциональны квадрату тока. Таким образом, увеличение $\cos \varphi$ приемников ведет к сокращению эксплуатационных расходов.

Для электротехнической установки, спроектированной с относительно низким $\cos \varphi$, оборудование (коммутационная аппаратура, приборы для контроля и др.) и провода необходимо выбирать на токи, бóльшие, чем при высоком значении коэффициента мощности $\cos \varphi$. Это влечет за собой выбор оборудования относительно больших габаритных размеров и проводов большего сечения, а следовательно, увеличение объема зданий, утяжеление фундаментов, опор и т. д.

Генераторы электрической энергии и трансформаторы характеризуются *номинальной установленной мощностью* S_n , которая определяется произведением номинальных значений напряжения U_n и тока I_n :

$$S_n = U_n I_n.$$

Если приемник имеет $\cos \varphi < 1$, активная мощность меньше номинальной, хотя генератор будет работать при номинальных значениях напряжения и тока (см. рис. 9.6, б и рис. 9.8, б). Таким образом, генератор по мощности оказывается недогруженным. Не загружен полностью и первичный двигатель. Недогрузка турбины и генератора приводит к снижению их коэффициента полезного действия.

Для полного использования номинальной установленной мощности генераторов и уменьшения тепловых потерь необходимо повышать $\cos \varphi$ установок до значений, близких к единице.

В тех случаях, когда естественные меры (правильный выбор и эксплуатация оборудования) не могут обеспечить должного значения коэффициента мощности установки, принимаются искусственные меры его повышения. Например, одной из таких мер является включение параллельно к приемникам (например, группе двигателей) батареи конденсаторов. В этом случае энергия в магнитном поле двигателя частично или полностью накапливается за счет энергии электрического поля конденсаторов, и наоборот. При этом генератор и провода, соединяющие его с цепью двигателя — конденсатор, разгружаются от обменной энергии, характеризующейся реактивной слагающей тока.

Таким образом, повышение $\cos \varphi$ установок означает значительную экономию электрической энергии, так как уменьшаются потери энергии в генераторах, трансформаторах, в воздушных и кабельных сетях. Одновременно разгрузка электрических установок

от обменной энергии позволяет лучше использовать установленную мощность, т.е. увеличить активную мощность, развиваемую генераторами, и передачу энергии через трансформаторы и по линиям.

Контрольные вопросы

1. В каком случае электрическая энергия называется активной, реактивной? Как определить среднюю или активную мощность цепи?
2. Что называют коэффициентом мощности цепи и почему? В каких пределах изменяется значение активной мощности в зависимости от значения коэффициента мощности?
3. Какова физическая природа индуктивного сопротивления в цепи переменного тока? От чего зависит его значение?
4. Напишите уравнения мгновенных значений напряжения и тока в цепи с емкостью. Постройте волновую и векторную диаграммы цепи.
5. Какова физическая природа емкостного сопротивления в цепи переменного тока?
6. Назовите три режима работы неразветвленной RLC -цепи. От чего зависит получение того или иного режима?
7. Чему равен коэффициент мощности в цепи последовательного соединения катушки индуктивности и конденсатора при $x_L = x_C$?
8. Как добиться резонанса напряжений в цепи? Чему равно полное сопротивление цепи при резонансе напряжений?
9. В последовательной цепи устанавливают режим резонанса. Какие приборы, включенные в цепь, позволят зафиксировать режим резонанса?
10. От чего зависит добротность последовательного контура и что она характеризует?
11. Как установить резонанс в параллельной цепи? Какие приборы позволят зафиксировать режим резонанса? Что влияет на добротность параллельного контура?

Глава 10

КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

10.1. Комплексные числа

Алгебраическая форма комплексного числа. Выражение вида $a + jb$ называется *комплексным числом* (обозначается подчеркнутой прописной буквой, например, \underline{A}):

$$\underline{A} = a + jb. \quad (10.1)$$

Первое слагаемое Re — *действительная часть числа \underline{A}* : $\text{Re } \underline{A} = a$, а второе — *мнимая часть числа \underline{A}* : $\text{Im } \underline{A} = jb$. Мнимое число jb есть произведение действительного числа b и *мнимой единицы j* ($j = \sqrt{-1}$).

Выражение (10.1) представляет собой комплексное число *в алгебраической форме*.

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. *Комплексная плоскость* — плоскость с расположенной на ней системой координат с двумя взаимно-перпендикулярными осями. Горизонтальная ось — ось действительных величин, или *действительная ось*, на которой от начала координат откладываются действительные числа a . Вертикальная ось — ось мнимых величин, или *мнимая ось*, на которой от начала координат откладываются мнимые числа b . Положительные значения откладываются по соответствующим осям вправо и вверх, отрицательные — влево и вниз (рис. 10.1, а).

Отложив на осях действительную и мнимую части комплексного числа \underline{A} , можно найти одну единственную точку M (см. рис. 10.1, а), соответствующую этому числу, и провести из начала координат в точку M один единственный вектор в комплексной плоскости. Соответствие числу \underline{A} выражается в том, что проекция отрезка A (длина вектора) на действительную ось равна действительной части числа \underline{A} : $\text{Re } \underline{A} = a$, а проекция отрезка A на мнимую ось, умноженная на j , равна мнимой части числа \underline{A} : $\text{Im } \underline{A} = jb$. Таким образом, любому комплексному числу в комплексной плоскости соответствует один единственный вектор. И, наоборот, любой вектор в комплексной плоскости можно выразить комплексным числом.

Мнимая единица j играет роль *поворотного множителя*, так как при умножении на j вектор, расположенный на действительной

оси, поворачивается на угол 90° против направления движения часовой стрелки — в положительном направлении.

Положение точки M на комплексной плоскости можно определять длиной вектора A и углом α между направлением этого вектора и положительным направлением действительной оси. Длина вектора A в определенном масштабе выражает абсолютное значение — *модуль комплексного числа*:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (10.2)$$

Угол α является *аргументом комплексного числа*:

$$\alpha = \arctg \frac{b}{a}. \quad (10.3)$$

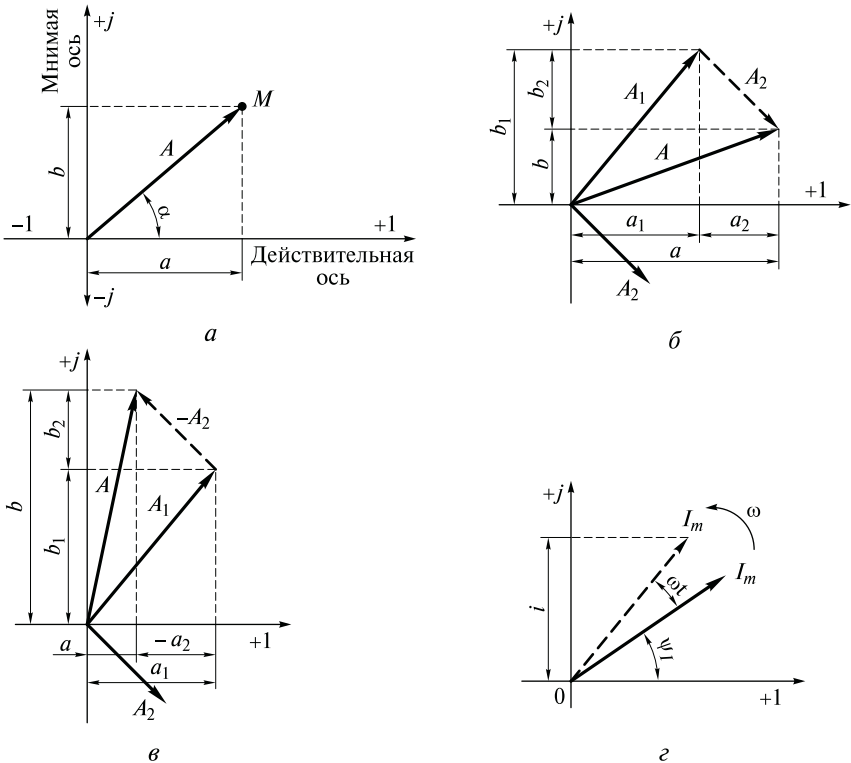


Рис. 10.1. Комплексная плоскость:

a — представление комплексного числа вектором; $б$ — сложение комплексных чисел; $в$ — вычитание комплексных чисел; $г$ — вектор тока на комплексной плоскости

Если вектор проведен не из начала координат, для представления его комплексным числом, во-первых, его можно перенести параллельно самому себе и провести из начала координат, а во-вторых, достаточно знать модуль числа и его аргумент. Зная модуль числа и его аргумент, можно представить комплексное число в тригонометрической форме. Так как (см. рис. 10.1, а)

$$a = A \cos \alpha; b = A \sin \alpha, \text{ то } \underline{A} = a + jb = A \cos \alpha + jA \sin \alpha,$$

или

$$\underline{A} = A(\cos \alpha + j \sin \alpha). \quad (10.4)$$

Из математики известно:

$$\cos \alpha + j \sin \alpha = e^{j\alpha}. \quad (10.5)$$

Соотношение (10.5) называется *формулой Эйлера*. На основании формулы Эйлера комплексное число можно выразить в *показательной форме*:

$$\underline{A} = Ae^{j\alpha}, \quad (10.6)$$

где e — основание натурального логарифма, $e = 2,7(1828)$.

Таким образом, комплексное число имеет три формы представления:

$$\underline{A} = a + jb = A(\cos \alpha + j \sin \alpha) = Ae^{j\alpha}. \quad (10.7)$$

Угол α в выражении (10.7) должен выражаться в радианах, так как показатель степени — отвлеченное число. Однако для большей наглядности допускается его запись в градусах. Например:

$$\begin{aligned} e^{j\frac{\pi}{2}} &= e^{j90^\circ} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j; e^{-j\frac{\pi}{2}} = e^{-j90^\circ} = \\ &= \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + j \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -j; \end{aligned}$$

$$e^{\pm j\pi} = e^{\pm j180^\circ} = \cos(\pm\pi) + j \sin(\pm\pi) = -1.$$

Как следует из приведенных примеров, множитель $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$, следовательно, множитель $e^{j\frac{\pi}{2}}$ играет такую же роль для показательной формы, как мнимая единица j для алгебраической формы

комплексного числа, т.е. является *поворотным множителем*. Таким образом, умножение комплексного числа в алгебраической форме на j , а в показательной форме на множитель $e^{j\frac{\pi}{2}}$ означает поворот соответствующего этому числу вектора на угол 90° в положительном направлении (против движения стрелки часов) без изменения его длины.

Умножение комплексного числа на множитель $e^{-j\frac{\pi}{2}}$ или $-j$ означает поворот соответствующего этому числу вектора на угол 90° в отрицательном направлении — по часовой стрелке.

Умножение комплексного числа на множитель $e^{\pm j\alpha}$ показывает, что соответствующий этому числу вектор повернут относительно положительной действительной полуоси на угол α в направлении, указанном знаком аргумента, без изменения его модуля. Поэтому множитель $e^{\pm j\alpha}$ (так же, как $\pm j$) называется *поворотным множителем*.

Если угол α является функцией времени, например $\alpha = \omega t$, то умножение комплексного числа на множитель $e^{j\omega t}$ означает непрерывное вращение вектора с угловой скоростью ω в положительном направлении.

Алгебраические действия с комплексными числами. Пусть заданы два комплексных числа:

$$\underline{A}_1 = a_1 + jb_1; \quad \underline{A}_2 = a_2 - jb_2.$$

Сложение и вычитание комплексных чисел. Правила сложения и вычитания комплексных чисел основываются на известных операциях сложения и вычитания векторов.

Представим заданные комплексные числа в определенном масштабе с помощью векторов (рис. 10.1, б). Результирующий вектор, равный сумме заданных комплексных чисел, получим по правилам сложения векторов: из конца вектора \overline{A}_1 проведем вектор, параллельный заданному вектору \overline{A}_2 ; из начала координат в конец последнего вектора построим результирующий вектор \overline{A} . Результирующий вектор можно представить комплексным числом в алгебраической форме, определив его действительную (a) и мнимую (jb) части (см. рис. 10.1, б):

$$\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = a + jb = (a_1 + a_2) + j(b_1 - b_2). \quad (10.8)$$

Таким образом, сумма нескольких комплексных чисел является комплексным числом, действительная часть которого равна алгебраической сумме действительных частей, а мнимая часть равна

алгебраической сумме мнимых частей слагаемых комплексных чисел.

Разность двух комплексных чисел \underline{A}_1 и \underline{A}_2 можно представить суммой тех же чисел, в которой вычитаемое взято с обратным знаком (рис. 10.1, в):

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \underline{A}_1 - \underline{A}_2 = a + jb = (a_1 + jb_1) - (a_2 - jb_2) = \\ &= (a_1 - a_2) + j(b_1 + b_2).\end{aligned}\quad (10.9)$$

Пример 10.1. Определить сумму \underline{C} и разность \underline{D} комплексных чисел:

$$\underline{A} = 2 + j3; \quad \underline{B} = -4 + j5.$$

Решение:

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} = (2 + j3) + (-4 + j5) = (2 - 4) + j(3 + 5) = -2 + j8;$$

$$\underline{D} = \underline{A} - \underline{B} = (2 + j3) + (4 - j5) = (2 + 4) + j(3 - 5) = 6 - j2.$$

Пример 10.2. Определить сумму \underline{C} комплексных чисел:

$$\underline{A} = 5e^{j30^\circ}; \quad \underline{B} = 7e^{-j60^\circ}.$$

Решение.

Сложение (вычитание) удобнее производить в алгебраической форме, поэтому сначала переведем заданные числа из показательной формы в алгебраическую через тригонометрическую форму:

$$\underline{A} = 5e^{j30^\circ} = 5\cos 30^\circ + j5\sin 30^\circ = 4,33 + j2,5;$$

$$\underline{B} = 7e^{-j60^\circ} = 7\cos 60^\circ - j7\sin 60^\circ = 3,5 - j6,06;$$

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} = (4,33 + j2,5) + (3,5 - j6,06) = 7,83 - j3,56.$$

Умножение комплексных чисел, выраженных в алгебраической форме. Комплексные числа, выраженные в алгебраической форме, умножаются по тем же правилам, что и обычные двучлены. Например:

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \underline{A}_1 \underline{A}_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2) = a_1a_2 + ja_2b_1 - ja_1b_2 - \\ &- j^2b_1b_2 = (a_1a_2 + b_1b_2) + j(a_2b_1 - a_1b_2).\end{aligned}\quad (10.10)$$

Деление комплексных чисел, выраженных в алгебраической форме. При делении комплексных чисел, представленных в алгебраической форме, предварительно нужно освободиться от мнимости в знаменателе, а затем произвести почленное деление. Для этого необходимо умножить числитель и знаменатель на один и тот же комплекс, сопряженный с комплексом

знаменателя. При этом частное от деления не изменится, а процедура деления упростится.

Два комплексных числа называются *сопряженными*, если они имеют одинаковые модули и равные по значению, но противоположные по знаку аргументы. Спряженный комплекс отмечается звездочкой.

Например, комплексное число

$$\underline{A}_1 = a_1 + jb_1 = A_1 e^{j\alpha_1},$$

где A_1 — модуль, $A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$; α_1 — аргумент комплексного числа, $\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{b_1}{a_1}$.

Комплексное число \underline{A}_1 имеет сопряженный комплекс

$$\underline{A}_1^* = a_1 - jb_1 = A_1 e^{-j\alpha_1}. \quad (10.11)$$

Произведение сопряженных комплексов есть действительное число, равное квадрату модуля комплексного числа:

$$\underline{A}_1 \underline{A}_1^* = (a_1 + jb_1)(a_1 - jb_1) = a_1^2 + b_1^2 = A_1^2. \quad (10.12)$$

В соответствии с этим частное \underline{A} от деления двух комплексов: $\underline{A}_1 = a_1 + jb_1$ и $\underline{A}_2 = a_2 - jb_2$ — можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \frac{\underline{A}_1}{\underline{A}_2} = \frac{\underline{A}_1 \underline{A}_2^*}{\underline{A}_2 \underline{A}_2^*} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_2 b_1 + a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 - b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned} \quad (10.13)$$

Умножение и деление комплексных чисел, выраженных в показательной форме. Нельзя не заметить, что при умножении и делении комплексных чисел в алгебраической форме приходится выполнять довольно много вычислений. Гораздо проще эти действия выполняются, если комплексные числа представлены в показательной форме.

Например:

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &= A_1 e^{j\alpha_1}; \quad \underline{A}_2 = A_2 e^{-j\alpha_2}; \\ \underline{A} &= \underline{A}_1 \underline{A}_2 = A_1 e^{j\alpha_1} A_2 e^{-j\alpha_2} = A_1 A_2 e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}; \end{aligned} \quad (10.14)$$

$$\underline{B} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1 e^{j\alpha_1}}{A_2 e^{-j\alpha_2}} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (10.15)$$

10.2. Выражение характеристик электрических цепей комплексными числами

В подразд. 8.2 была рассмотрена возможность представления синусоидального тока или напряжения с помощью вращающегося вектора в прямоугольной системе координат, а в подразд. 10.1 — возможность выражения любого вектора комплексным числом в комплексной плоскости. Это дает основание полагать, что, совместив прямоугольную систему координат с комплексной плоскостью, вращающиеся векторы, изображающие синусоидальные величины, можно выразить комплексными числами.

Токи и напряжения. Предположим, что требуется выразить комплексным числом ток, уравнение мгновенного значения которого

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_I). \quad (10.16)$$

На комплексной плоскости (рис. 10. 1, з) изобразим вектор длиной I_m , повернутый относительно оси действительных величин под углом ψ_I .

В показательной форме такой вектор можно выразить комплексным

$$\underline{I} = I_m e^{j\psi_I}. \quad (10.17)$$

Если этот вектор вращать в положительном направлении с угловой скоростью ω , то вращающийся вектор в момент времени t можно выразить комплексом

$$\underline{I} = I_m e^{j(\omega t + \psi_I)}.$$

Проекция вращающегося вектора на мнимую ось в любой момент времени t , равная мгновенному значению тока i , может быть представлена выражением

$$i = \text{Im}[I_m e^{j(\omega t + \psi_I)}] = \text{Im}[I_m e^{j\psi_I} e^{j\omega t}].$$

При расчете электрических цепей мы имеем дело с векторами, которые вращаются с одинаковой скоростью, и их взаимное расположение остается неизменным во времени. Поэтому необходимость учитывать вращение векторов при изображении синусои-

дальних величин на комплексной плоскости отпадает (как и в методах расчета электрических цепей с помощью векторных диаграмм). Как и ранее, достаточно изобразить векторы в начальный момент времени и найти соответствующие векторам комплексные числа, а не рассматривать комплексные выражения, содержащие переменную t . Например, ток i (см. формулу (10.16)) можно представить комплексным числом (см. формулу (10.17)).

При расчете электрических цепей переменного тока обычно пользуются действующими значениями напряжений и токов (U , I), и на векторных диаграммах длины векторов отображают их действующие значения. В этом случае модули комплексов выражаются в действующих значениях. Таким образом, комплекс* тока (см. формулу (10.16)) может быть представлен в виде

$$\dot{I} = I e^{j\psi_I}. \quad (10.18)$$

Пример 10.3. Представить комплексными числами токи электрической цепи (рис. 10.2, а) при заданном напряжении на ее зажимах.

Решение.

Пусть напряжение на зажимах цепи выражается уравнением

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_U).$$

Этому напряжению соответствует вектор \bar{U} в комплексной плоскости (рис. 10.2, б) и комплексное число

$$\dot{U} = U e^{j\psi_U} = U \cos \psi_U + j U \sin \psi_U. \quad (10.19)$$

На той же комплексной плоскости построены векторы токов i_1 , i_2 в ветвях рассматриваемой цепи и общего тока i .

Ток i_1 в катушке отстает от напряжения на угол φ_1 , и его мгновенное значение

$$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_U - \varphi_1) = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1),$$

где угол $\psi_1 = \psi_U - \varphi_1$.

Вектору \bar{I}_1 соответствует комплексное число

$$\dot{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1} = I_1 \cos \psi_1 + j I_1 \sin \psi_1. \quad (10.20)$$

* Комплексы синусоидально изменяющихся во времени величин принято обозначать прописными буквами (аналогично действующим значениям) с точками над ними, например: \dot{U} — обозначение комплекса напряжения; \dot{I} — обозначение комплекса тока. Комплексы величин, не зависящих от времени, например сопротивлений, проводимостей, обозначают прописными буквами без точек, подчеркнутыми снизу.

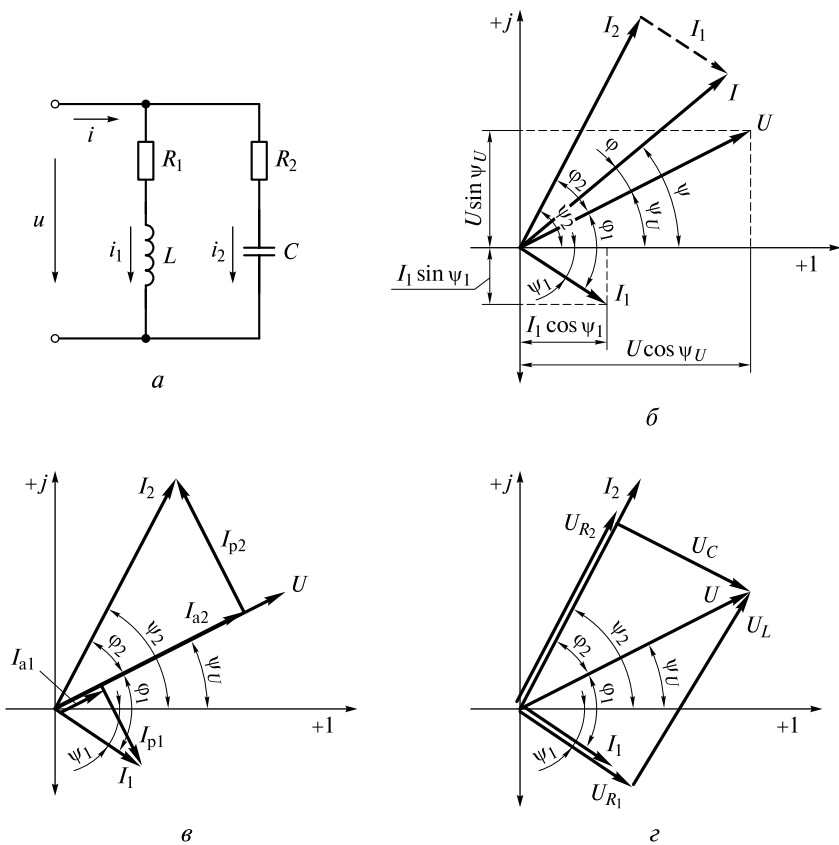


Рис. 10.2. Представление напряжений, токов, сопротивлений и проводимостей комплексными числами:

a — схема электрической цепи; *б* — векторная диаграмма цепи; *в* — разложение токов на активные и реактивные составляющие; *г* — разложение общего напряжения на составляющие напряжения ветвей

Ток i_2 в конденсаторе опережает напряжение на угол φ_2 , и его мгновенное значение

$$i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_U + \varphi_2) = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_2),$$

где угол $\psi_2 = \psi_U + \varphi_2$.

Вектору \bar{I}_2 соответствует комплексное число

$$\dot{I}_2 = I_2 e^{j\psi_2} = I_2 \cos \psi_2 + j I_2 \sin \psi_2. \tag{10.21}$$

Вектор тока в неразветвленной части цепи в соответствии с первым законом Кирхгофа равен сумме векторов токов параллельных ветвей:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2.$$

Сложение векторов можно заменить сложением комплексов (10.20) и (10.21):

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \quad (10.22)$$

$$\begin{aligned} \dot{I} &= (I_1 \cos \psi_1 + jI_1 \sin \psi_1) + (I_2 \cos \psi_2 + jI_2 \sin \psi_2) = \\ &= (I_1 \cos \psi_1 + I_2 \cos \psi_2) + j(I_1 \sin \psi_1 + I_2 \sin \psi_2) = Ie^{j\psi} = \\ &= I \cos \psi + jI \sin \psi. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Следует обратить внимание, что действительная и мнимая части комплекса, соответствующего вектору, в общем случае не одно и то же, что активная и реактивная составляющие того же вектора. Например, действительная и мнимая части комплекса тока I_1 равны проекциям вектора тока на действительную и мнимую оси комплексной плоскости (см. рис. 10.2, б). Активная и реактивная составляющие вектора тока I_1 (I_{a1} и I_{p1}) равны его проекциям на взаимно-перпендикулярные оси, одна из которых направлена вдоль вектора напряжения этого участка цепи (рис. 10.2, в).

Сопротивления участков электрической цепи в комплексной форме. Выразим в символической форме комплексы активного и реактивного (индуктивного и емкостного) сопротивлений цепи переменного тока.

Активное сопротивление. Рассмотрим участок цепи с сопротивлением R_1 (см. рис. 10.2, а).

Чтобы представить какой-либо вектор комплексным числом необходимо определить модуль вектора и его начальную фазу. Модуль вектора напряжения на активном сопротивлении R_1 $U_{R1} = I_1 R_1$. Так как напряжение на активном сопротивлении R_1 совпадает по фазе с током, начальная фаза напряжения $\psi_{U_{R1}} = \psi_1$ (рис. 10.2, з). Комплекс напряжения на активном сопротивлении R_1 с учетом формулы (10.20)

$$\dot{U}_{R1} = U_{R1} e^{j\psi_1} = I_1 R_1 e^{j\psi_1} = \dot{I}_1 R_1. \quad (10.24)$$

Согласно закону Ома и формуле (10.24) комплекс активного сопротивления

$$\underline{R}_1 = \frac{\dot{U}_{R1}}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_1 R_1}{\dot{I}_1} = R_1. \quad (10.25)$$

Отсюда следует, что активное сопротивление в комплексной форме выражается действительным положительным числом.

Аналогично комплекс сопротивления R_2 ($R_2 = R_2$).

Реактивные сопротивления в комплексной форме. Модуль вектора напряжения на индуктивности в соответствии с законом Ома в действующих значениях $U_L = I_1 x_L$.

Так как напряжение на индуктивности u_L опережает ток в индуктивности на 90° , то для определения начальной фазы напряжения u_L к начальной фазе тока необходимо прибавить 90° . Для участка цепи с L (см. рис. 10.2, а) $\psi_{U_L} = \psi_1 + 90^\circ$. Тогда комплекс напряжения на индуктивности с учетом формулы (10.20)

$$\dot{U}_L = U_L e^{j(\psi_1 + 90^\circ)} = I_1 x_L e^{j\psi_1} e^{j90^\circ} = \dot{I}_1 x_L e^{j90^\circ} = \dot{I}_1 j x_L. \quad (10.26)$$

В соответствии с законом Ома комплекс реактивного индуктивного сопротивления

$$\underline{X}_L = \frac{\dot{U}_L}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_1 j x_L}{\dot{I}_1} = j x_L = x_L e^{j90^\circ}. \quad (10.27)$$

Модуль вектора напряжения на емкости в соответствии с законом Ома в действующих значениях $U_C = I_2 x_C$.

Напряжение на емкости u_C отстает от тока в емкости на 90° , следовательно, для определения начальной фазы напряжения u_C от начальной фазы тока необходимо вычесть 90° . Для участка цепи с C (см. рис. 10.2, а) $\psi_{U_C} = \psi_2 - 90^\circ$. Тогда комплекс напряжения на емкости с учетом формулы (10.21)

$$\dot{U}_C = U_C e^{j(\psi_2 - 90^\circ)} = I_2 x_C e^{j\psi_2} e^{-j90^\circ} = \dot{I}_2 x_C e^{-j90^\circ} = -\dot{I}_2 j x_C. \quad (10.28)$$

Комплекс реактивного емкостного сопротивления в соответствии с законом Ома

$$\underline{X}_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{I}_2} = \frac{-\dot{I}_2 j x_C}{\dot{I}_2} = -j x_C = x_C e^{-j90^\circ}. \quad (10.29)$$

Отсюда следует, что реактивные сопротивления в комплексной форме выражаются мнимыми числами, причем индуктивное сопротивление положительно, а емкостное сопротивление отрицательно.

Полное сопротивление участка цепи в комплексной форме с последовательным соединением активного и реактивного сопротивлений. Выразим, например, полные сопротивления каждой из ветвей цепи (см. рис. 10.2, а).

Напряжение \bar{U} на каждой из параллельных ветвей одинаково и равно напряжению на зажимах цепи (см. рис. 10.2, з). При этом напряжение на зажимах цепи равно сумме активной и реактивной составляющих напряжения для каждой из ветвей:

$$\bar{U} = \bar{U}_{R_1} + \bar{U}_L; \quad \bar{U} = \bar{U}_{R_2} + \bar{U}_C. \quad (10.30)$$

Заменим векторы в равенствах (10.30) соответствующими комплексами и воспользуемся выражениями (10.20) и (10.21):

$$\begin{aligned} \dot{U} = \dot{U}_{R_1} + \dot{U}_L &= I_1 R_1 e^{j\psi_1} + I_1 x_L e^{j(\psi_1+90^\circ)} = \dot{I}_1 R_1 + \dot{I}_1 x_L e^{j90^\circ} = \\ &= \dot{I}_1 (R_1 + jx_L) = \dot{I}_1 \underline{Z}_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U} = \dot{U}_{R_2} + \dot{U}_C &= I_2 R_2 e^{j\psi_2} + I_2 x_C e^{j(\psi_2-90^\circ)} = \dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_2 x_C e^{-j90^\circ} = \\ &= \dot{I}_2 (R_2 - jx_C) = \dot{I}_2 \underline{Z}_2. \end{aligned}$$

Отсюда комплекс полного сопротивления катушки индуктивности (первая ветвь)

$$\underline{Z}_1 = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_1} = R_1 + jx_L. \quad (10.31)$$

Комплекс полного сопротивления конденсатора (вторая ветвь)

$$\underline{Z}_2 = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_2} = R_2 - jx_C. \quad (10.32)$$

Таким образом, полное сопротивление участка цепи с последовательным соединением активного и реактивного (индуктивного или емкостного) элементов в комплексной форме выражается комплексным числом, действительная часть которого равна активному сопротивлению, мнимая часть — реактивному сопротивлению этого участка.

Комплексы сопротивлений катушки индуктивности и конденсатора можно получить с учетом сведений из подразд. 9.4 и 9.5:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\dot{U}}{\dot{I}_1} = \frac{U e^{j\psi_U}}{I_1 e^{j\psi_1}} = z_1 e^{j(\psi_U - \psi_1)} = z_1 e^{j\varphi_1} = \\ &= z_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) = z_1 \cos \varphi_1 + j z_1 \sin \varphi_1 = R_1 + jx_L. \end{aligned} \quad (10.33)$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \frac{\dot{U}}{\dot{I}_2} = \frac{U e^{j\psi_U}}{I_2 e^{j\psi_2}} = z_2 e^{j(\psi_U - \psi_2)} = z_2 e^{-j\varphi_2} = \\ &= z_2 (\cos \varphi_2 - j \sin \varphi_2) = z_2 \cos \varphi_2 - j z_2 \sin \varphi_2 = R_2 - jx_C. \end{aligned} \quad (10.34)$$

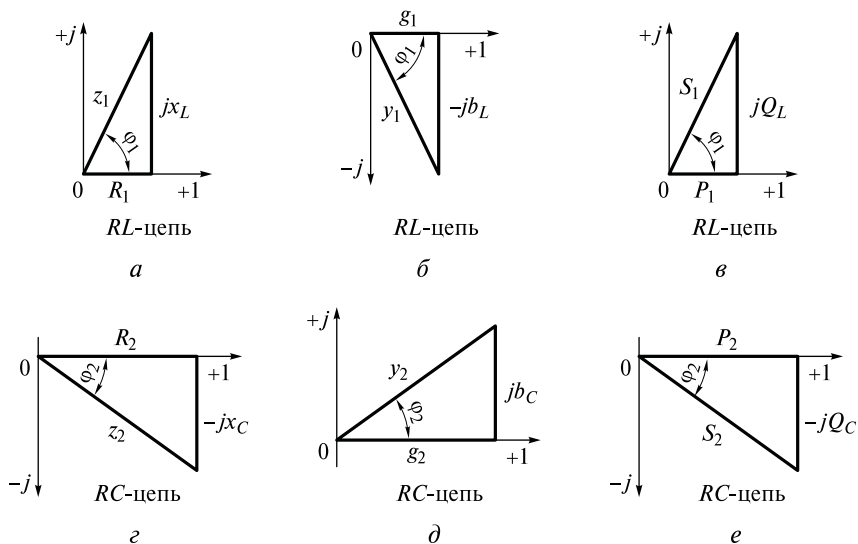


Рис. 10.3. Треугольники сопротивлений (а, г), проводимостей (б, д) и мощностей (в, е)

Комплексы полного сопротивления и его составляющие (действительная и мнимая части) могут быть представлены на комплексной плоскости в виде *треугольников сопротивлений* (рис. 10.3, а, г).

Модули комплексных полных сопротивлений определяются из треугольников сопротивлений:

$$\text{для } RL\text{-цепи} \quad z_1 = \sqrt{R_1^2 + x_L^2}; \quad (10.35)$$

$$\text{для } RC\text{-цепи} \quad z_2 = \sqrt{R_2^2 + x_C^2}. \quad (10.36)$$

Следует подчеркнуть, что комплекс полного сопротивления \underline{Z} цепи не зависит от значений начальных фаз напряжения и тока, а определяется углом сдвига фаз между ними; при этом активное сопротивление, являясь действительным числом, откладывается на действительной оси комплексной плоскости.

Проводимости RL - и RC -цепей в комплексной форме. Выражения для полной проводимости участка цепи в комплексной форме можно получить, представив комплекс полной проводимости как величину, обратную комплексу полного сопротивления рассматриваемого участка:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}. \quad (10.37)$$

Для RL -цепи

$$\begin{aligned} \underline{Y}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R_1 + jx_L} = \frac{R_1 - jx_L}{(R_1 + jx_L)(R_1 - jx_L)} = \\ &= \frac{R_1}{R_1^2 + x_L^2} - j \frac{x_L}{R_1^2 + x_L^2} = g_1 - jb_L, \end{aligned} \quad (10.38)$$

где g_1 — активная проводимость RL -цепи, $g_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + x_L^2}$; b_L — реак-

тивная индуктивная проводимость RL -цепи, $b_L = \frac{x_L}{R_1^2 + x_L^2}$.

Для RC -цепи

$$\begin{aligned} \underline{Y}_2 &= \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_2 - jx_C} = \frac{R_2 + jx_C}{(R_2 - jx_C)(R_2 + jx_C)} = \\ &= \frac{R_2}{R_2^2 + x_C^2} + j \frac{x_C}{R_2^2 + x_C^2} = g_2 + jb_C, \end{aligned} \quad (10.39)$$

где g_2 — активная проводимость RC -цепи, $g_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + x_C^2}$; b_C — реак-

тивная емкостная проводимость RC -цепи, $b_C = \frac{x_C}{R_2^2 + x_C^2}$.

Таким образом, комплекс полной проводимости участка цепи с последовательным соединением активного и реактивного (индуктивного или емкостного) элементов выражается комплексным числом, действительная часть которого равна активной проводимости участка цепи, мнимая часть — реактивной проводимости этого участка, взятой с соответствующим знаком: для RL -цепи — со знаком «-», для RC -цепи — со знаком «+».

Комплексы полных проводимостей цепей и их составляющие (действительная и мнимая части) могут быть представлены на комплексной плоскости в виде *треугольников проводимостей* (рис. 10.3, б, д).

Модули комплексных полных проводимостей определяются из треугольников проводимостей:

$$RL\text{-цепи} \text{ — } y_1 = \sqrt{g_1^2 + b_L^2}; \quad RC\text{-цепи} \text{ — } y_2 = \sqrt{g_2^2 + b_C^2}. \quad (10.40)$$

Следует отметить, что *комплекс полной проводимости \underline{Y} цепи* не зависит от значений начальных фаз напряжения и тока, а опреде-

ляется углом сдвига фаз между ними; при этом активная проводимость, являясь действительным числом, откладывается на действительной оси комплексной плоскости.

Мощность в комплексной форме. Комплекс полной мощности цепи (принято обозначение \tilde{S}) определяется как произведение комплекса напряжения на сопряженный комплекс тока цепи:

$$\tilde{S} = \dot{U} I^* \quad (10.41)$$

Цепь с активным сопротивлением R и индуктивностью L . Например, для левой ветви цепи (см. рис. 10.2, а) комплекс полной мощности

$$\tilde{S}_1 = \dot{U} I_1^* = U e^{j\psi_U} I_1 e^{-j\psi_I} = UI_1 e^{j(\psi_U - \psi_I)} = UI_1 e^{j\varphi_1} = S_1 e^{j\varphi_1}, \quad (10.42)$$

где S_1 — модуль комплекса полной мощности, $S_1 = UI_1$.

В алгебраической форме

$$\tilde{S}_1 = S_1 e^{j\varphi_1} = S_1 \cos \varphi_1 + j S_1 \sin \varphi_1 = P_1 + j Q_L. \quad (10.43)$$

Цепь с активным сопротивлением R и емкостью C . Для цепи с активным сопротивлением и емкостью выражение для комплекса полной мощности можно получить аналогичным путем:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_2 = \dot{U} I_2^* &= U e^{j\psi_U} I_2 e^{-j\psi_2} = UI_2 e^{j(\psi_U - \psi_2)} = UI_2 e^{-j\varphi_2} = \\ &= S_2 e^{-j\varphi_2}, \end{aligned} \quad (10.44)$$

где S_2 — модуль комплекса полной мощности, $S_2 = UI_2$.

В алгебраической форме

$$\tilde{S}_2 = S_2 e^{-j\varphi_2} = S_2 \cos \varphi_2 - j S_2 \sin \varphi_2 = P_2 - j Q_C. \quad (10.45)$$

Мнимая часть комплекса полной мощности в цепи с емкостью имеет отрицательный знак в отличие от мнимой части комплекса полной мощности в цепи с индуктивностью, которая положительна.

Комплексы мощностей аналогично комплексам сопротивлений и проводимостей можно представить на комплексной плоскости в виде *треугольников мощностей* (рис. 10.3, в, е).

Из треугольников мощностей можно получить выражения для модулей комплексных полных мощностей RL - и RC -цепей в виде:

$$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_L^2}; \quad S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_C^2}. \quad (10.46)$$

Законы Кирхгофа в комплексной (символической) форме. В подразд. 10.2 были рассмотрены возможность представления синусоидальных напряжений и токов и выражение сопротивлений и проводимостей комплексными числами. Замена операций с векторами алгебраическими действиями с комплексными числами позволяет значительно упростить расчет сложных цепей переменного тока. Если величины выражены в комплексной форме, все методы расчета и вытекающие из них соотношения для цепей постоянного тока можно применить и для цепей переменного тока. Таким образом, практический смысл применения комплексных чисел для решения задач электротехники состоит в том, что при этом обеспечивается единство методов расчета электрических цепей постоянного и переменного токов.

Метод расчета электрических цепей с применением комплексных чисел называется *комплексным*, или *символическим*. Основными законами расчета электрических цепей являются законы Кирхгофа. Представим их запись в символическом виде в общем случае.

Первый закон Кирхгофа. *Алгебраическая сумма комплексов токов в узле электрической цепи равна нулю:*

$$\sum_{\text{алг}} \dot{I} = 0. \quad (10.47)$$

При этом комплексы токов, направленных к узлу, записываются с одним знаком, а направленные от узла — с другим знаком.

Иначе говоря, *сумма комплексов токов, входящих в узел, равна сумме комплексов токов, выходящих из узла.*

Например, для цепи (см. рис. 10.2, а):

$$\dot{I} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 0; \quad \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2.$$

Второй закон Кирхгофа. *В любом замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма комплексов ЭДС источников равна алгебраической сумме комплексов падений напряжения:*

$$\sum_{\text{алг}} \dot{E} = \sum_{\text{алг}} \dot{I} \underline{Z}. \quad (10.48)$$

Например, для цепи (см. рис. 10.2, а) уравнения, составленные для замкнутых контуров по второму закону Кирхгофа, в мгновенных значениях имеют вид:

$$u = i_1 R_1 + u_L; \quad u = i_2 R_2 + u_C; \quad i_1 R_1 + u_L - i_2 R_2 - u_C = 0.$$

В комплексной форме эти уравнения имеют вид:

$$\dot{U} = \dot{U}_{R_1} + \dot{U}_L = \dot{I}_1 R_1 + j \dot{I}_1 x_L = \dot{I}_1 \underline{Z}_1;$$

$$\dot{U} = \dot{U}_{R_2} + \dot{U}_C = \dot{I}_2 R_2 - j \dot{I}_2 x_C = \dot{I}_2 \underline{Z}_2;$$

$$\dot{I}_1 \underline{Z}_1 - \dot{I}_2 \underline{Z}_2 = 0.$$

Контрольные вопросы

1. Какие числа называются комплексными? Как обозначается комплексное число?
2. Перечислите формы записи комплексного числа. Как из одной формы записи комплексного числа перейти к другой форме?
3. Какая форма комплексных чисел наиболее удобна для сложения (вычитания), умножения (деления) комплексных чисел?
4. Что такое поворотный множитель и чем объясняется такое название? Какова особенность вектора, представленного комплексным числом с аргументом $\alpha = \omega t$?
5. Обоснуйте возможность выражения синусоидально изменяющихся величин комплексными числами.
6. Как выражаются в символическом виде сопротивления, проводимости и мощности цепей переменного тока?
7. В чем заключается расчет цепи переменного тока символическим методом? Какие законы и методы при этом применяются?

Глава 11

ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

11.1. Трехфазная система ЭДС

Создание и использование трехфазных цепей непосредственно связано с передачей электрической энергии на большие расстояния.

Первые опыты, связанные с передачей электрической энергии на большие расстояния, были проведены на постоянном токе в конце XIX в. (1882 г.). При передаче энергии к потребителям на большие расстояния значительная часть ее бесполезно, но неизбежно расходовалась в проводах. Для уменьшения потерь в проводах наиболее целесообразный подход — повышение напряжения, вырабатываемого генератором, передача энергии под высоким напряжением в место потребления и там понижение напряжения до нужных пределов. Однако высокое напряжение в генераторах постоянного тока ухудшало работу коллектора, что часто приводило к авариям. Изоляция машин не выдерживала столь высоких напряжений. Кроме указанных, имелся еще целый ряд проблем, в связи с которыми осуществить такое преобразование напряжений в случае постоянного тока чрезвычайно трудно. Напротив, в случае переменного тока такое преобразование осуществить с помощью трансформатора легко и с очень малыми потерями энергии.

Началом практического применения переменного тока для целей электропривода считают 1889 г., когда М.О. Доливо-Добровольский* изобрел и разработал трехфазную систему переменного тока. Им же были построены первый трехфазный асинхронный двигатель и трехфазный трансформатор. Первая линия электропередачи трехфазного переменного тока протяженностью 175 км при напряжении 15 000 В с применением трехфазных трансформаторов была построена и испытана М.О. Доливо-Добровольским в 1891 г.

Прогрессивность системы трехфазного тока была настолько очевидной, что к началу XX в. она получила всеобщее признание и стала быстро развиваться. В настоящее время производство, передача и распределение электрической энергии осуществляется в основном по трехфазной системе. Трехфазная система обеспечи-

* Доливо-Добровольский М.О. (1862—1919) — выдающийся русский электротехник.

вает наиболее выгодные условия передачи электрической энергии по проводам и позволяет построить простые по устройству и удобные в работе электродвигатели.

Получение трехфазной системы ЭДС. *Трехфазная симметричная система ЭДС* — совокупность трех ЭДС, имеющих одинаковую частоту и амплитуду, сдвинутых по фазе относительно друг друга на угол 120° .

Трехфазная система ЭДС может быть получена с помощью трехфазного генератора. Устройство и принцип действия простейшего трехфазного генератора аналогичны однофазному генератору постоянного тока, рассмотренному в подразд. 7.2. Разница заключается в том, что в роторе (статоре) уложены три, а не одна, самостоятельные обмотки, сдвинутые относительно друг друга в пространстве на угол 120° .

На рис. 11.1, *a* схематично показано устройство трехфазного генератора с тремя самостоятельными обмотками на роторе, сдвинутыми относительно друг друга в пространстве на угол 120° и одной парой полюсов на статоре. Начала и концы обмоток обозначают соответственно буквами *A, B, C* и *X, Y, Z*. Однако в реальных генераторах обмотки размещают на статоре, и они неподвижны. Вращаются магнитные полюса, расположенные на роторе. Та-

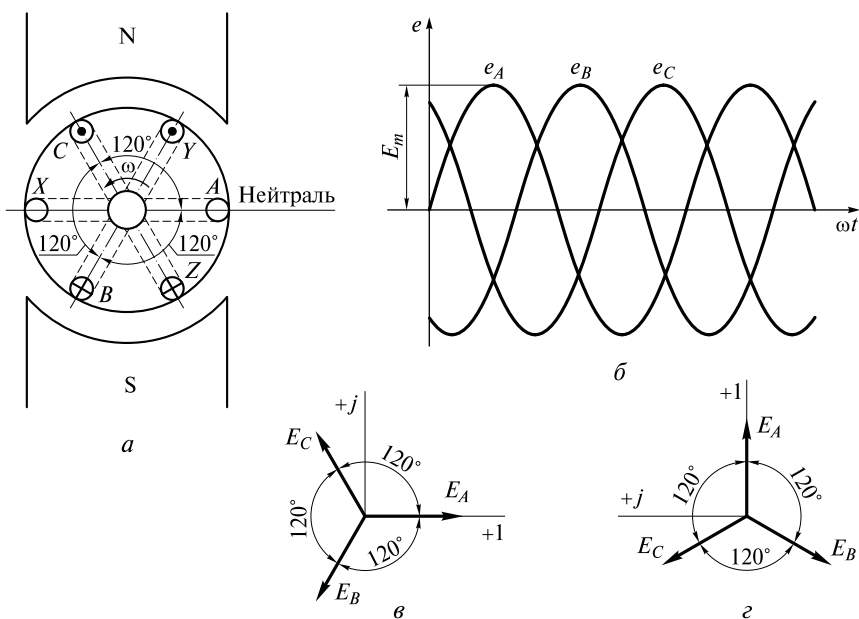


Рис. 11.1. Схема устройства трехфазного генератора (*a*); волновая (*б*) и векторные (*в, г*) диаграммы симметричной трехфазной системы ЭДС

кая конструкция проще и надежнее в эксплуатации. При этом принцип работы генератора остается неизменным.

Если число витков в обмотках одинаково, то согласно формуле (7.19) при вращении во всех обмотках наводятся одинаковые по значению ЭДС. В соответствии с пространственным расположением обмоток начальные фазы этих ЭДС сдвинуты относительно друг друга на 120° .

Способы представления трехфазной системы ЭДС. Трехфазную систему ЭДС можно представить тремя способами: в виде уравнений, волновой и векторной диаграмм; комплексными числами.

Представление в виде уравнений. Для трехфазного генератора при начальном положении обмоток ($t = 0$), показанном на рис. 11.1, *а*, и вращении ротора против часовой стрелки систему наведенных ЭДС можно представить в виде уравнений:

$$\begin{aligned} e_A &= E_m \sin \omega t; \quad e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ); \\ e_C &= E_m \sin(\omega t - 240^\circ) = E_m \sin(\omega t + 120^\circ). \end{aligned} \quad (11.1)$$

Представление в виде волновой и векторной диаграмм. ЭДС можно представить графически в виде волновой и векторной диаграмм.

При расположении обмоток в начальный момент времени, как показано на рис. 11.1, *а*, ЭДС e_A совпадает с началом отсчета, e_B отстает от e_A , а e_C отстает от e_B и опережает e_A на 120° (рис. 11.1, *б*, *в*).

При изображении векторных диаграмм трехфазных цепей часто положительную полуось действительных чисел направляют не вправо, а вертикально вверх (рис. 11.1, *з*). При этом вид волновой диаграммы (см. рис. 11.1, *б*) и выражений (11.1) не изменяется.

Векторы ЭДС вращаются против часовой стрелки и мимо неподвижного начала отсчета (положительное направление оси x) проходят в следующем порядке (который называется *прямой последовательностью фаз*): $\vec{E}_A \rightarrow \vec{E}_B \rightarrow \vec{E}_C$.

Представление комплексными числами. Согласно векторным диаграммам, изображенным в комплексной плоскости, (см. рис. 11.1, *б*, *в*) трехфазную систему ЭДС можно представить комплексными числами в показательной форме:

$$\dot{E}_A = E; \quad \dot{E}_B = Ee^{-j120^\circ}; \quad \dot{E}_C = Ee^{j120^\circ}. \quad (11.2)$$

Несвязанная и связанная трехфазные системы. Обмотки трехфазного генератора изображают, как показано на рис. 11.2. При этом *направления ЭДС в обмотках условно принимают от конца к началу обмотки: от X к A, от Y к B, от Z к C.*

Каждую обмотку трехфазного генератора можно соединить с отдельным приемником энергии, как показано на рис. 11.2. В этом

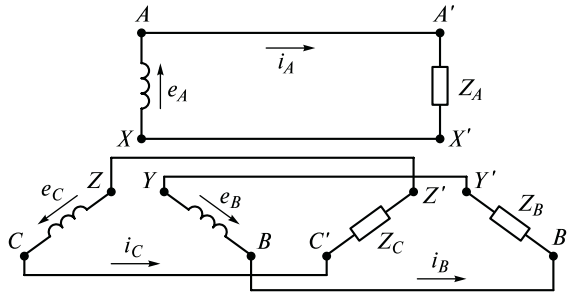


Рис. 11.2. Несвязанная трехфазная система электрических цепей

случае получается *несвязанная* трехфазная система с тремя самостоятельными цепями и шестью проводами. Большое число соединительных проводов определяют неэкономичность несвязанной системы, из-за чего она не нашла применения.

Сокращение числа соединительных проводов достигается тем, что обмотки генератора и отдельные фазы приемника электрически связываются между собой. Для этой цели М. О. Доливо-Добровольским были предложены две схемы соединения (как для генератора, так и для приемника), которые применяются и сейчас: *звездой* и *треугольником*, что позволяет уменьшить число проводов, соединяющих генератор с приемником, с шести при несвязанной системе до четырех или до трех.

Необходимо отметить, что приемники электрической энергии (электродвигатели, электропечи, электролампы, ЭВМ и другая электроаппаратура) обычно непосредственно не связаны с установленными на электростанциях генераторами. На пути электроэнергии от генератора к приемникам установлены трансформаторы (в трехфазных системах чаще всего трехфазные), с помощью которых в электрической сети неоднократно изменяется напряжение. По отношению к трехфазным генераторам они сами являются приемниками энергии. В связи с этим в дальнейшем под трехфазным источником мы будем подразумевать генератор или трансформатор.

Соединение обмоток генератора звездой. При соединении обмоток генератора *звездой* (рис. 11.3, а) концы обмоток (X, Y, Z) объединяют в общую точку — узел, называемый *нейтралью генератора*, или *нулевой точкой*, и обозначаемый буквой N . К началам обмоток генератора (A, B, C) присоединяют три *линейных провода*, идущих к приемнику. В четырехпроводной системе к нейтрали генератора присоединяется *нулевой, или нейтральный, провод*. В трехпроводной системе необходимость в нейтральном проводе отсутствует.

Разность потенциалов между линейным и нейтральным проводами, называется *фазным напряжением*. Фазные напряжения ис-

точника (u_A, u_B, u_C) — это напряжения между началами и концами фаз (см. рис. 11.3, а). Они или равны соответствующим ЭДС (если потребитель не подключен) или отличаются от ЭДС на значение падения напряжения в обмотках генератора. Если сопротивлением обмотки можно пренебречь, то фазное напряжение равно соответствующей ЭДС:

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A; \dot{U}_B = \dot{E}_B; \dot{U}_C = \dot{E}_C.$$

В симметричной системе фазные напряжения изображаются на векторной диаграмме так же, как и ЭДС, — тремя равными по модулю векторами, сдвинутыми по фазе на 120° (рис. 11.3, б).

При этом действующие значения фазных напряжений

$$U_A = U_B = U_C = U_{\text{ф}}. \tag{11.3}$$

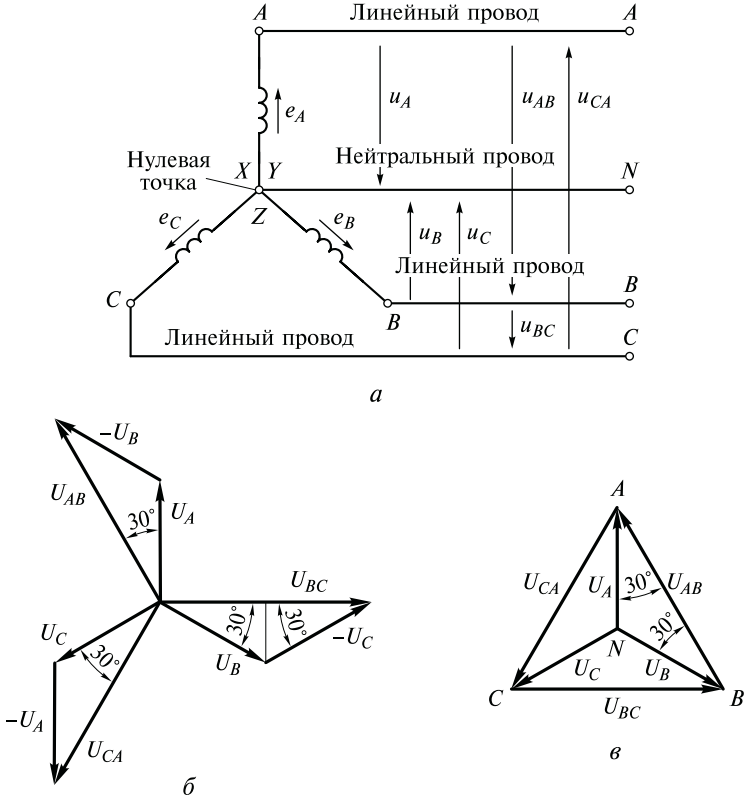


Рис. 11.3. Соединение обмоток генератора звездой:

а — схема соединения; б — построение векторов линейных напряжений; в — топографическая диаграмма

Разность потенциалов между каждой парой линейных проводов называется *линейным напряжением* (u_{AB} , u_{BC} и u_{CA}).

Связь между линейными и фазными напряжениями при соединении генератора звездой. Для удобства примем потенциал нулевой точки N источника равным нулю. Тогда потенциалы его линейных зажимов:

$$\varphi_A = u_A; \varphi_B = u_B; \varphi_C = u_C.$$

Линейные напряжения:

$$\begin{aligned} u_{AB} &= \varphi_A - \varphi_B = u_A - u_B; \quad u_{BC} = \varphi_B - \varphi_C = u_B - u_C; \\ u_{CA} &= \varphi_C - \varphi_A = u_C - u_A. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Вычитание синусоидальных величин (см. формулу (11.4)) нагляднее и проще всего выполнять графически в векторной форме, представив синусоидальные величины соответствующими векторами (см. рис. 11.3, б). Из векторной диаграммы видно, что при симметричной системе фазных напряжений система линейных напряжений тоже симметрична. Линейные напряжения равны по модулю:

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_l \quad (11.5)$$

и сдвинуты относительно друг друга на 120° . При этом звезда векторов линейных напряжений опережает звезду векторов фазных напряжений на 30° , т. е. повернута на 30° относительно звезды векторов фазных напряжений в сторону вращения векторов.

Определим соотношение модулей линейных и фазных напряжений. Для этого рассмотрим любой их трех построенных треугольников (см. рис. 11.3, б), образованных двумя фазными и одним линейным напряжениями. Так как фазные напряжения в симметричной системе по модулю равны между собой (см. формулу (11.3)), то рассматриваемый треугольник является равнобедренным. Очевидно, что перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла треугольника на противоположную сторону, является медианой, т. е. делит сторону пополам. Так как острый угол треугольника равен 30° , то

$$1/2 U_l = U_\phi \cos 30^\circ,$$

откуда

$$U_l = 2U_\phi \cos 30^\circ = \frac{2U_\phi \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}U_\phi = 1,73U_\phi, \quad (11.6)$$

т. е. *линейное напряжение в $\sqrt{3}$ раз больше фазного напряжения.*

Например, если фазное напряжение симметричного трехфазного источника энергии равно 127 В, то его линейное напряжение

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} U_{\text{ф}} = 1,73 \cdot 127 = 220 \text{ В.}$$

При фазном напряжении 220 В линейное напряжение

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} U_{\text{ф}} = 1,73 \cdot 220 = 380 \text{ В.}$$

Таким образом, значения напряжений 127 В, 220 В и 380 В в бытовой электрической сети связаны соотношением $\sqrt{3}$.

Напряжения источника можно представить как на векторной, так и на топографической диаграмме (рис. 11.3, *в*). В последнем случае нейтральную точку N располагают в начале координат (ее потенциал принят равным нулю). Концы векторов \vec{U}_A , \vec{U}_B , \vec{U}_C обозначают соответствующими буквами A , B , C . Тогда векторы, проведенные между точками A , B , C , соответствуют линейным напряжениям \vec{U}_{AB} , \vec{U}_{BC} , \vec{U}_{CA} .

Соединение обмоток генератора треугольником. При соединении обмоток генератора треугольником конец первой обмотки X соединен с началом второй обмотки B , конец второй обмотки Y соединен с началом третьей обмотки C и конец третьей обмотки Z соединен с началом первой обмотки A . От точек соединения к приемнику идут три линейных провода (рис. 11.4, *а*).

При соединении обмоток генератора треугольником образуется замкнутый контур из трех ЭДС. При симметричной системе и правильном соединении начал и концов фаз суммарная ЭДС в контуре равна нулю: $\vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C = 0$ (рис. 11.4, *б*), и ток в контуре не протекает.

Однако при неправильном включении обмоток, если не соблюдать порядок соединения, когда конец предыдущей обмотки соединяется с началом следующей, сумма ЭДС окажется равной двойному значению ЭДС фазы. Такой режим может оказаться крайне опасным и вызвать перегрев обмоток источника и аварийную ситуацию.

Например, на рисунке (рис. 11.4, *в*) показана схема соединения, в которой перепутаны местами конец и начало фазы B . Из векторной диаграммы (рис. 11.4, *г*) следует, что $\sum E = 2E_{\text{ф}}$.

Кроме того, опасный режим работы может вызвать даже незначительная несимметрия системы ЭДС. При несимметрии системы ЭДС их сумма не равна нулю, поэтому уже при холостом ходе в обмотках источника образуется ток. Так как сопротивление обмоток незначительно, ток может быть большим даже при малой несимметрии ЭДС.

При соединении обмоток генератора треугольником линейные напряжения между линейными проводами одновременно являются и фазными напряжениями:

$$U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}. \quad (11.7)$$

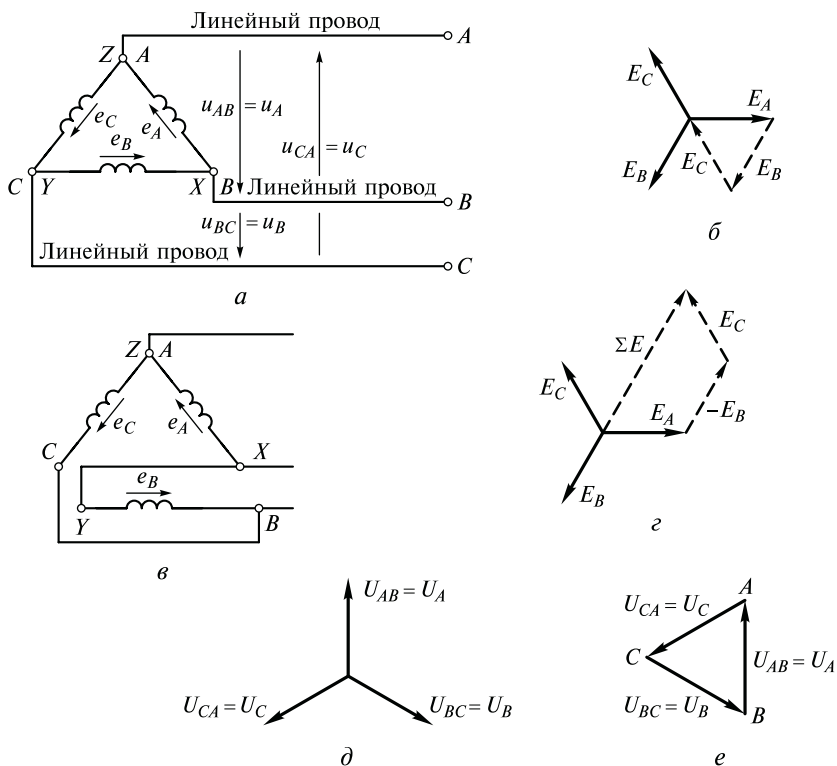


Рис. 11.4. Соединение обмоток генератора треугольником:

а — схема соединения; *б* — звезда ЭДС; *в* — схема неправильного соединения обмоток; *г* — векторная диаграмма при неправильном соединении; *д* — звезда напряжений; *е* — треугольник напряжений

Векторную диаграмму симметричной системы напряжений при соединении треугольником можно представить в виде звезды (рис. 11.4, *д*) или в виде замкнутого треугольника векторов (рис. 11.4, *е*). В последнем случае диаграмма является топографической.

11.2. Расчет трехфазной цепи при соединении источника и приемника звездой

Связанная четырехпроводная трехфазная система электрических цепей (трехфазная цепь) и ее особенности. Для получения связанной четырехпроводной трехфазной цепи (рис. 11.5, *а*) три части трехфазного приемника (которые, как и в источнике, называются *фазами*) соединяются звездой. При этом три конца приемника объединяются в общую точку, называемую, как и у источника, *нейтралью*, или *нулевой точкой*, которая обозначается буквой *N'*.

Нулевые точки источника и приемника (N и N') соединяются нейтральным (нулевым) проводом. Концы лучей звезды приемника обозначаются прописными буквами A' , B' , C' . Три линейных провода, идущие от начал A , B , C источника, присоединяют к соответствующим концам A' , B' , C' звезды приемника.

Положительные направления токов в линейных проводах (*линейных токов*) i_A , i_B , i_C выбирают совпадающими с направлениями ЭДС соответствующих фаз источника, т.е. от источника к приемнику.

Токи в фазах приемника четырехпроводной трехфазной цепи равны токам в линейных проводах:

$$\dot{I}'_A = \dot{I}_A; \dot{I}'_B = \dot{I}_B; \dot{I}'_C = \dot{I}_C \quad (11.8)$$

и имеют то же направление.

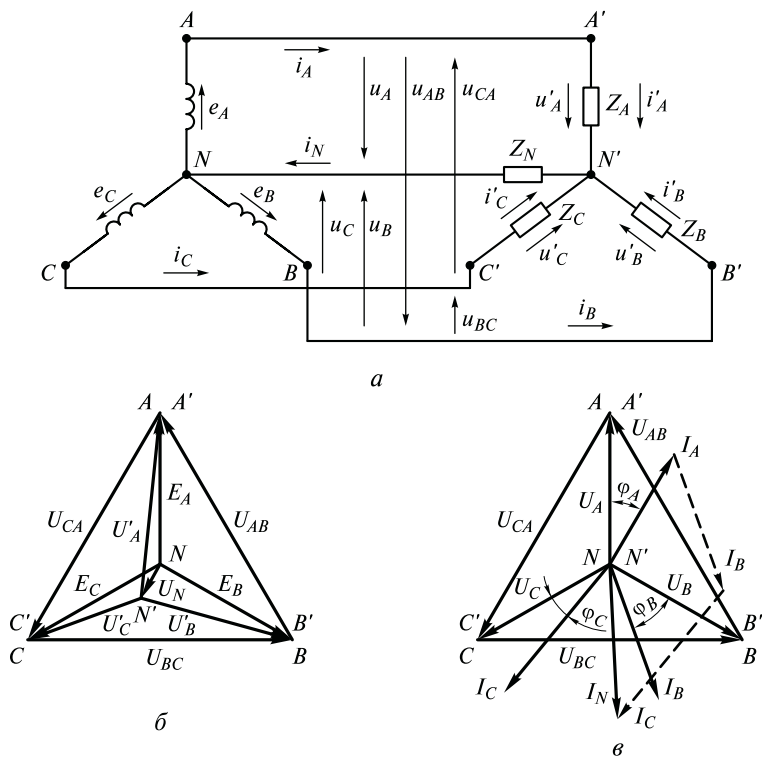


Рис. 11.5. Четырехпроводная трехфазная цепь:

a — схема цепи; b — топографическая диаграмма для общего случая; v — диаграмма напряжений и токов при несимметричном приемнике и $z_N = 0$

Таким образом, положительное направление фазных токов приемника — от начал фаз к концу, например от A' к X' и т. п.

Положительное направление тока в нейтральном проводе изображают в соответствии с законом непрерывного течения тока, т. е. от узла N' приемника к узлу N источника. При этом по первому закону Кирхгофа можно записать:

$$i_N = i_A + i_B + i_C; \bar{I}_N = \bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C; \dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C. \quad (11.9)$$

Расчет четырехпроводной цепи в общем случае. Под общим случаем подразумевается: равенство или неравенство между собой фазных напряжений источника ($\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$); равенство или неравенство между собой сопротивлений фаз приемника ($\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$); равенство или неравенство нулю сопротивления нулевого провода z_N .

Рассматриваемая трехфазная цепь (см. рис. 11.5, а) представляет собой электрическую цепь с двумя узлами: нейтральными точками N и N' . Наиболее удобным методом расчета подобной цепи является метод узлового напряжения.

Узловое напряжение при расчете указанным методом может быть выражено комплексом

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{E}_A \underline{Y}_A + \dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}. \quad (11.10)$$

Напряжения на фазах приемника выражаются комплексами:

$$\dot{U}'_A = \dot{E}_A - \dot{U}_N; \dot{U}'_B = \dot{E}_B - \dot{U}_N; \dot{U}'_C = \dot{E}_C - \dot{U}_N. \quad (11.11)$$

Токи в фазах (линейных проводах) определяются по закону Ома:

$$\dot{I}'_A = \dot{I}_A = \frac{\dot{U}'_A}{\underline{Z}_A}; \dot{I}'_B = \dot{I}_B = \frac{\dot{U}'_B}{\underline{Z}_B}; \dot{I}'_C = \dot{I}_C = \frac{\dot{U}'_C}{\underline{Z}_C}. \quad (11.12)$$

Ток в нулевом проводе также определяется по закону Ома:

$$\dot{I}_N = \frac{\dot{U}_N}{\underline{Z}_N}. \quad (11.13)$$

Ток в нулевом проводе можно определить и по формуле (11.9):

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C.$$

Рассмотренный метод расчета трехфазных цепей пригоден во всех случаях при соединении звездой, в том числе и при отсутствии по разным причинам нулевого провода: например, при его обрыве в четырехпроводной линии или же в симметричной трехпроводной линии (см. далее).

Смещение нейтрали. В зависимости от параметров цепи узловое напряжение \dot{U}_N может быть равным и не равным нулю.

Рассмотрим вариант, когда $\dot{U}_N \neq 0$. В этом случае нулевая точка приемника на топографической диаграмме не совпадает с нулевой точкой источника, поэтому напряжение \dot{U}_N называют *напряжением смещения нейтрали*.

Вследствие смещения нейтрали напряжения на фазах приемника согласно формуле (11.11) оказываются неодинаковыми. На топографической диаграмме, приведенной на рис. 11.5, б, видно, что вследствие смещения нейтрали возникает «перекос фаз»: на одних фазах приемника напряжение оказывается меньше допустимого, на других имеет место превышение допустимого напряжения. Это вызывает значительное изменение токов в фазах приемника, что недопустимо на практике.

Обрыв нулевого провода ($z_N = \infty$) при несимметричной нагрузке — пример ситуации, когда в случае несимметричной нагрузки ($\underline{Y}_A \neq \underline{Y}_B \neq \underline{Y}_C$) узловое напряжение $\dot{U}_N \neq 0$. Именно поэтому *в нулевой провод предохранители не устанавливаются*.

Роль нулевого провода в трехфазной четырехпроводной цепи. Рассмотрим частный случай расчета цепи (см. рис. 11.5, а), когда при достаточно малом сопротивлении нейтрального провода ($z_N \approx \approx 0$) им можно пренебречь. В этом случае разность потенциалов между точками N и N' равна нулю (напряжение $U_N = 0$), и трехфазная цепь может рассматриваться как три независимых контура.

Если при этом сопротивления линейных проводов малы и ими можно пренебречь, то фазные напряжения приемника равны соответствующим фазным напряжениям источника:

$$u'_A = u_A; \quad u'_B = u_B; \quad u'_C = u_C.$$

При этом действующие значения напряжений:

$$U'_A = U'_B = U'_C = U_A = U_B = U_C = U_\phi; \quad U_\phi = U_l / \sqrt{3}.$$

Таким образом, в четырехпроводной системе, когда сопротивление нулевого провода равно нулю ($z_N = 0$), нулевой провод является уравнивающим. С его помощью потенциалы нейтралей источника и приемника принудительно уравниваются. Так как напряжение смещения $\dot{U}_N = 0$, звезда векторов фазных напряжений приемника совпадает со звездой фазных напряжений источника.

В этом случае при несимметричном приемнике ($\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$) звезды фазных (и равных им линейных) токов приемника могут быть несимметричными (рис. 11.5, в), и по нулевому проводу протекает ток, определяемый выражением (11.9).

Четырехпроводная система применяется в современных электрических цепях бытового и промышленного электроснабжения с напряжением 380 В и 220 В.

Симметричный режим трехфазной цепи при соединении звездой. Трехпроводная трехфазная цепь. Симметричный режим трехфазной цепи характеризуется, во-первых, симметричной системой трехфазных напряжений и, во-вторых, симметричным трехфазным приемником.

Трехфазный приемник называют симметричным, если сопротивления фаз приемника имеют одинаковый характер и численно равные полные сопротивления:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z} = z e^{\pm j\varphi},$$

где знак степени поворотного множителя $e^{\pm j\varphi}$ зависит от характера нагрузки: «+» соответствует индуктивной нагрузке, «-» — емкостной нагрузке.

При симметричной нагрузке комплексы проводимостей

$$\underline{Y}_A = \underline{Y}_B = \underline{Y}_C = \underline{Y}.$$

В этом случае в числителе уравнения (11.10) проводимость \underline{Y} можно вынести за скобку. Так как сумма трех симметричных ЭДС (в скобках) равна нулю, то напряжение смещения $\dot{U}_N = 0$. Поэтому независимо от сопротивления нулевого провода (в том числе при его отсутствии, например обрыве, т.е. при $z_N = \infty$) ток в нулевом проводе согласно выражению (11.13) равен нулю:

$$\dot{I}_N = \frac{\dot{U}_N}{\underline{Z}_N} = \frac{0}{\underline{Z}_N} = 0.$$

В связи с этим *при симметричной нагрузке необходимость в нулевом проводе отпадает, и четырехпроводную систему следует заметить трехпроводной по схеме звезда— звезда* (рис. 11.6, а).

Так как при симметричной нагрузке $\dot{U}_N = 0$, то фазные напряжения приемника согласно выражению (11.11) равны фазным напряжениям источника:

$$\dot{U}'_A = \dot{E}_A = \dot{U}_A; \dot{U}'_B = \dot{E}_B = \dot{U}_B; \dot{U}'_C = \dot{E}_C = \dot{U}_C.$$

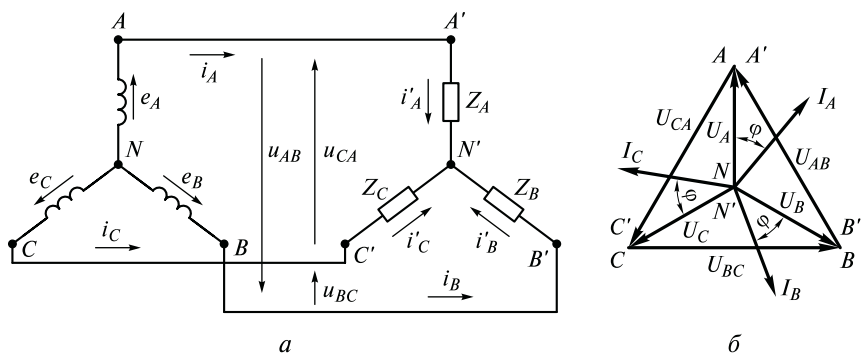


Рис. 11.6. Соединение трехфазной цепи звездой:

a — схема трехпроводной цепи; *б* — векторная диаграмма напряжений и токов в симметричной цепи

Токи в цепи согласно выражениям (11.12):

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \frac{\dot{U}'_A}{z e^{\pm j\varphi}} = \frac{U_\Phi}{z} e^{\mp j\varphi} = I_\Phi e^{\mp j\varphi}; \\ \dot{I}_B &= \frac{\dot{U}'_B}{z e^{\pm j\varphi}} = \frac{U_\Phi e^{-j120^\circ}}{z e^{\pm j\varphi}} = I_\Phi e^{\mp j\varphi} e^{-j120^\circ}; \\ \dot{I}_C &= \frac{\dot{U}'_C}{z e^{\pm j\varphi}} = \frac{U_\Phi e^{j120^\circ}}{z e^{\pm j\varphi}} = I_\Phi e^{\mp j\varphi} e^{j120^\circ}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Здесь

$$I_\Phi = I_\pi = \frac{U_\Phi}{z} = \frac{U_\pi / \sqrt{3}}{z}. \quad (11.15)$$

Таким образом, действующие значения линейных токов цепи и равных им фазных токов приемника численно равны между собой, а векторы токов сдвинуты относительно друг друга на равные углы 120° .

При этом сумма трех равных по модулю векторов токов, сдвинутых друг относительно друга на 120° ,

$$\bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C = 0.$$

На рис. 11.6, *б* представлена векторная диаграмма напряжений и токов трехфазной цепи при симметричном приемнике и соединении фаз источника и приемника звездой для случая, когда нагрузка имеет активно-индуктивный характер.

Мощности трехфазного приемника (общий случай). Мощности каждой фазы системы определяются согласно формулам (9.71)...(9.74). Например, для фазы А:

$$\begin{aligned} P_A &= U_A I_A \cos \varphi_A; \quad Q_A = U_A I_A \sin \varphi_A; \\ S_A &= U_A I_A. \end{aligned}$$

Общая активная мощность, отдаваемая трехфазным генератором и получаемая трехфазным приемником,

$$P = \sum P = P_A + P_B + P_C. \quad (11.16)$$

Общая реактивная мощность, отдаваемая трехфазным генератором и получаемая трехфазным приемником,

$$Q = \sum^{\text{алг}} Q_{\Phi}. \quad (11.17)$$

При расчете мощности каждой фазы Q_{Φ} и общей реактивной мощности Q индуктивная мощность считается положительной, а емкостная — отрицательной.

Общая полная мощность равна модулю S соответствующей комплексной мощности:

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \tilde{S}_A + \tilde{S}_B + \tilde{S}_C = \dot{U}_A^* I_A + \dot{U}_B^* I_B + \dot{U}_C^* I_C = \\ &= P \pm jQ = \mathbf{S} e^{\pm j\varphi}. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Здесь модуль комплексной мощности

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (11.19)$$

Мощности P и Q в формулах (11.16)...(11.18) идентичны.

Мощность трехфазной цепи при соединении звездой и симметричном приемнике. Активная мощность фазы

$$P_{\Phi} = U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \varphi.$$

Общая активная мощность, отдаваемая трехфазным генератором и получаемая трехфазным приемником,

$$P = 3P_{\Phi} = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \varphi = \sqrt{3}U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi, \quad (11.20)$$

так как при соединении звездой $U_{\Phi} = U_{\text{л}} / \sqrt{3}$ и $I_{\Phi} = I_{\text{л}}$.

Реактивная мощность каждой фазы согласно формуле (9.74)

$$Q_{\phi} = U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi.$$

Общая реактивная мощность, отдаваемая трехфазным генератором и получаемая трехфазным приемником,

$$Q = 3Q_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi = \sqrt{3}U_{л} I_{л} \sin \varphi. \quad (11.21)$$

Полная мощность

$$S = 3S_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} = \sqrt{3}U_{л} I_{л}. \quad (11.22)$$

11.3. Расчет трехфазной цепи при соединении источника и приемника треугольником

Связанная трехпроводная трехфазная цепь при соединении треугольником и ее особенности. Фазы приемника соединяют аналогично соединению треугольником обмоток источника. При этом из трех обмоток приемника образуется замкнутый контур, аналогичный контуру, образованному из фаз источника. Общие точки двух фаз источника и двух фаз приемника соединяются между собой линейными проводами. При этом образуется связанная трехфазная *трехпроводная система*, в которой каждая обмотка источника соединена с соответствующей фазой приемника парой линейных проводов, причем каждый линейный провод осуществляет такую связь в двух смежных фазах (рис. 11.7, а).

При соединении треугольником сопротивление каждой фазы приемника обозначается двумя буквами, соответствующими началам фаз источника, между которыми оно включено: Z_{AB} , Z_{BC} , Z_{CA} .

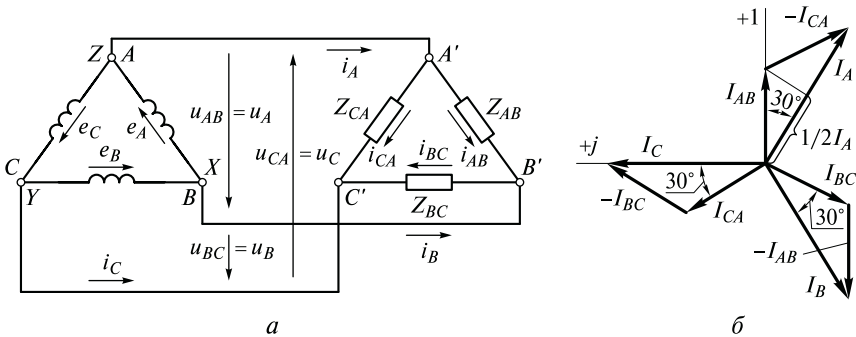


Рис. 11.7. Связанная трехфазная цепь при соединении треугольником:
а — схема цепи; б — векторная диаграмма токов в симметричной цепи

Как видно из рис. 11.7, *a*, при соединении треугольником каждая фаза приемника находится под соответствующим линейным напряжением: \dot{U}_{AB} , \dot{U}_{BC} , \dot{U}_{CA} . Если сопротивлениями линейных проводов можно пренебречь, то линейные напряжения цепи (равные фазным напряжениям источника) являются одновременно и линейными (фазными) напряжениями трехфазного приемника:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A = \dot{U}'_{AB} = \dot{U}'_A; \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B = \dot{U}'_{BC} = \dot{U}'_B; \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C = \dot{U}'_{CA} = \dot{U}'_C.$$

При этом действующие значения напряжений:

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U'_{AB} = U'_{BC} = U'_{CA} = U_{\text{л}}; \\ U_A = U_B = U_C = U'_A = U'_B = U'_C = U_{\text{ф}}.$$

Причем при соединении треугольником справедливо равенство:

$$U_{\text{ф}} = U_{\text{л}}. \quad (11.23)$$

Выбор направлений и определение токов в трехфазной цепи.

Положительные направления линейных токов в цепи, как и в случае соединения фаз приемника звездой, выбираются от источника к приемнику. Направления токов i_{AB} , i_{BC} , i_{CA} , протекающих в фазах приемника, совпадают с направлениями соответствующих фазных напряжений трехфазного приемника: \dot{U}_{AB} , \dot{U}_{BC} , \dot{U}_{CA} (см. рис. 11.7, *a*).

Фазные токи приемника определяются по закону Ома:

$$i_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}; i_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}}; i_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}}. \quad (11.24)$$

Токи в линейных проводах определяются по первому закону Кирхгофа. Так, для узлов A' , B' , C' можно записать:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}. \quad (11.25)$$

Симметричный режим трехфазной цепи при соединении треугольником. Данный режим, аналогично соединению звездой, характеризуется симметричной системой напряжений источника и равенством между собой комплексов сопротивлений фаз:

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = \underline{Z} = \underline{z}e^{\pm j\varphi},$$

где знак степени поворотного множителя $e^{\pm j\varphi}$ зависит от характера нагрузки: «+» соответствует индуктивной нагрузке, «-» — емкостной нагрузке.

При соединении треугольником и симметричном режиме цепи фазные токи:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{AB} &= \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{\dot{U}_A}{z e^{\pm j\varphi}} = \frac{U_\Phi}{z} e^{\mp j\varphi} = I_\Phi e^{\mp j\varphi}; \\ \dot{I}_{BC} &= \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{\dot{U}_B}{z e^{\pm j\varphi}} = \frac{U_\Phi e^{-j120^\circ}}{z e^{\pm j\varphi}} = I_\Phi e^{\mp j\varphi} e^{-j120^\circ}; \\ \dot{I}_{CA} &= \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{\dot{U}_C}{z e^{\pm j\varphi}} = \frac{U_\Phi e^{j120^\circ}}{z e^{\pm j\varphi}} = I_\Phi e^{\mp j\varphi} e^{j120^\circ}. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Здесь фазный ток определяется по формуле

$$I_\Phi = \frac{U_\Phi}{z} = \frac{U_\Delta}{z}. \quad (11.27)$$

Из выражений (11.26) следует, что фазные токи трехфазного приемника имеют одинаковые модули, равные их действующим значениям, и сдвинуты относительно соответствующих фазных напряжений на одинаковые углы φ , зависящие от характера нагрузки фаз приемников. Кроме того, фазные токи сдвинуты друг относительно друга на угол 120° . Векторная диаграмма токов в трехфазной цепи при соединении треугольником представлена на рис. 11.7, б.

Линейные токи трехфазной цепи при соединении треугольником согласно формуле (11.25) равны разности соответствующих комплексов или соответствующих векторов. Действующее значение любого линейного тока ($I_A = I_B = I_C = I_\Delta$) можно определить по векторной диаграмме из равнобедренных треугольников (с тупыми углами 120° и острыми углами, каждый из которых равен 30°), образованных векторами двух фазных и одного линейного токов. Например:

$$I_A = 2I_{AB} \cos 30^\circ = I_{AB} \sqrt{3}.$$

Общее соотношение между линейными и фазными токами в симметричной трехфазной цепи при соединении треугольником

$$I_\Delta = \sqrt{3} I_\Phi. \quad (11.28)$$

Звезда векторов линейных токов сдвинута относительно звезды фазных токов на 30° против вращения векторов.

Мощности симметричной трехфазной цепи при соединении приемника треугольником. В общем случае выражения для опреде-

ления мощностей трехфазного приемника одинаковы независимо от типа соединения — звездой или треугольником (см. формулы (11.16)... (11.19)).

Для симметричной трехфазной цепи при соединении приемника треугольником выражения для определения мощностей:

- активная мощность каждой фазы системы согласно формуле (9.73)

$$P_{\phi} = U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi;$$

- общая активная мощность, отдаваемая трехфазным генератором и получаемая трехфазным приемником,

$$P = 3P_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi = \sqrt{3}U_{л} I_{л} \cos \varphi, \quad (11.29)$$

так как при соединении треугольником $U_{\phi} = U_{л}$ и $I_{\phi} = I_{л} / \sqrt{3}$;

- реактивная мощность каждой фазы согласно формуле (9.74)

$$Q_{\phi} = U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi;$$

- общая реактивная мощность, отдаваемая трехфазным генератором и получаемая трехфазным приемником,

$$Q = 3Q_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi = \sqrt{3}U_{л} I_{л} \sin \varphi; \quad (11.30)$$

- полная мощность согласно формуле (9.71)

$$S = 3S_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} = \sqrt{3}U_{л} I_{л}. \quad (11.31)$$

11.4. Вращающееся магнитное поле, создаваемое трехфазным током

Получение вращающегося магнитного потока с помощью трехфазного тока. Как известно, трехфазная система обеспечивает наиболее выгодные условия передачи электрической энергии по проводам, благодаря чему в настоящее время производство, передача и распределение электрической энергии осуществляется в основном по трехфазной системе. Кроме того, есть и еще одно очень важное техническое достоинство трехфазного тока — возможность создания с его помощью вращающегося магнитного потока — явления, которое лежит в основе принципа устройства и работы электродвигателей трехфазного тока.

Рассмотрим процесс создания вращающегося магнитного потока с помощью трехфазного тока. В двигателях трехфазного тока обмотка, предназначенная для создания вращающегося магнит-

ного поля, состоит из трех катушек, расположенных на внутренней поверхности неподвижного стального цилиндра — статора. Каждая катушка играет роль одной из фаз (A' , B' , C') симметричного приемника, который подключается к трехфазному источнику по схеме, показанной, например, на рис. 11.6, *a*. Концы катушек (A' , X' ; B' , Y' и C' , Z') снаружи соединены звездой (рис. 11.8 *a*).

Оси катушек расположены в одной плоскости и сдвинуты в пространстве на угол 120° относительно друг друга. По катушкам обмотки статора двигателя протекают синусоидальные токи, создаваемые трехфазным источником, которые имеют одинаковые амплитуду и частоту, но по фазе (во времени) сдвинуты относительно друг друга на 120° :

$$i_A = I_m \sin \omega t; \quad i_B = I_m \sin(\omega t - 2/3 \pi);$$

$$i_C = I_m \sin(\omega t + 2/3 \pi).$$

Положительные направления токов в фазах обмотки (от начала фазы к ее концу) отмечены крестиками в начале фаз и точками

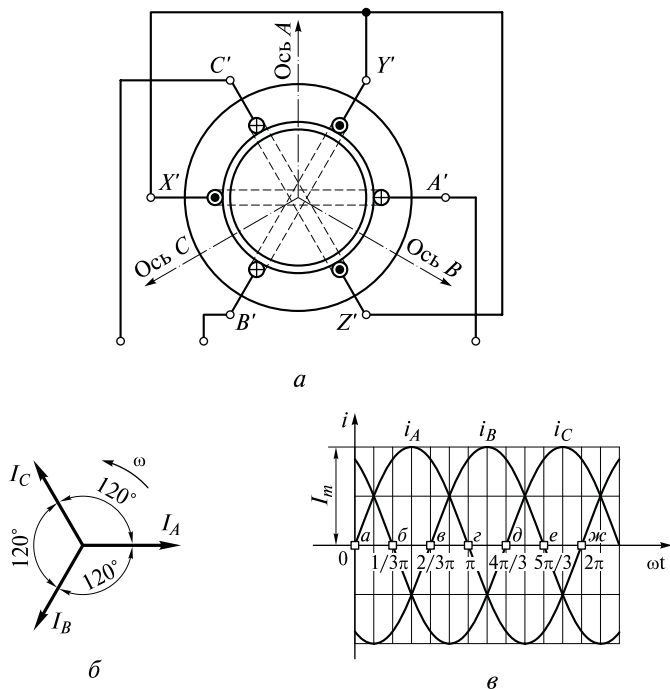


Рис. 11.8. Получение вращающегося магнитного поля:

a — трехфазная обмотка асинхронного двигателя; *б* — векторная диаграмма токов в фазах обмотки; *в* — волновая диаграмма токов

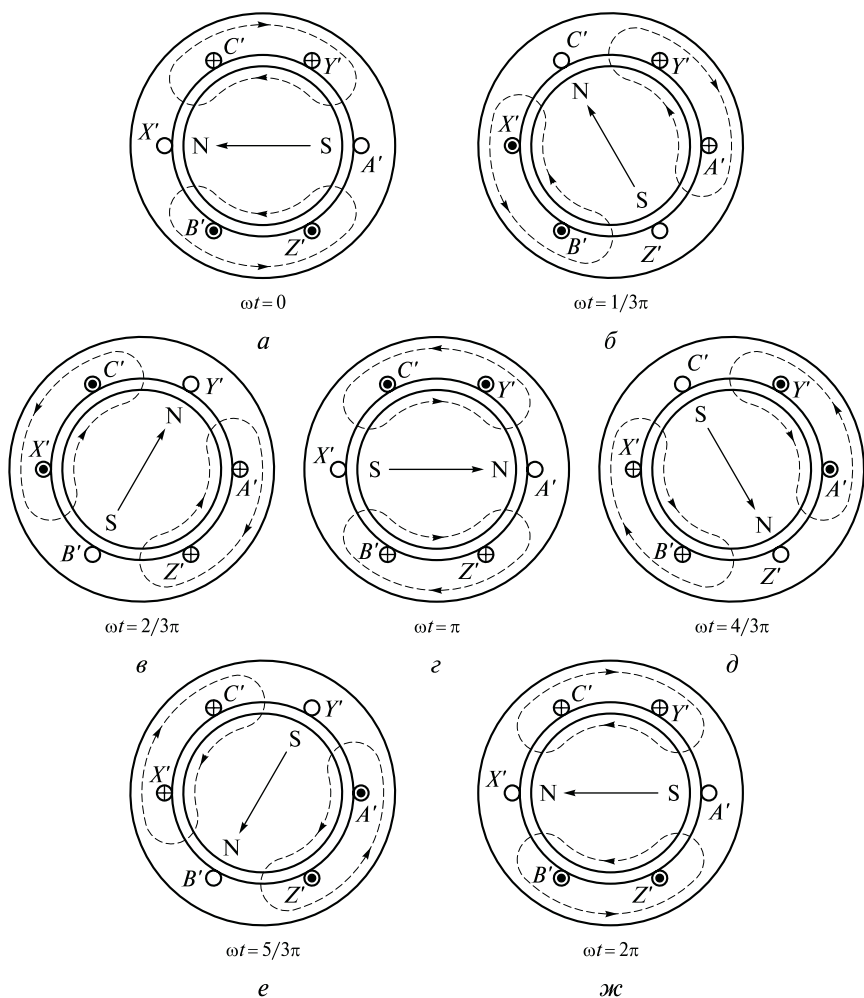


Рис. 11.9. Вращающийся магнитный поток для нескольких моментов времени (а...ж), созданный трехфазным током

в конце фаз, отрицательные направления токов (от конца к началу фазы) имеют противоположное обозначение. На рис. 11.8, б изображена векторная диаграмма трехфазной системы токов, на которой направление вектора тока фазы A' совпадает с началом отсчета времени. По волновой диаграмме (рис. 11.8, в), показанной в соответствии с векторной, в любой момент времени в интервале периода можно определить направление токов (положительное, отрицательное) в фазах обмотки двигателя. Покажем действительные направления токов в каждой катушке статора для нескольких моментов времени, соответствующих точкам а, б, в,

$z, d, e, ж$ (см. рис. 11.8, $в$). Для этого изобразим статор с трехфазной обмоткой столько раз, сколько моментов времени нас интересует (см. рис. 11.9), и для каждого момента времени отметим направления токов в началах и концах фаз обмотки статора.

Например, в момент времени, соответствующий точке a (см. рис. 11.8, $в$), ток в фазе A' отсутствует, в фазе B' ток имеет отрицательное значение, и в фазе C' — положительное значение. Поэтому на рис. 11.9, a в катушке $A'X'$ отсутствуют обозначения направлений тока и в начале (A') фазы, и в ее конце (X'). В катушке $B'Y'$ ток направлен от конца катушки (Y') (направление тока обозначено крестиком) к ее началу (B') (направление тока обозначено точкой). В катушке $C'Z'$ ток направлен от начала C' (направление обозначено крестиком) к концу Z' (направление обозначено точкой). Аналогично на рис. 11.9 ($б... ж$) покажем направления токов в катушках статора для остальных отмеченных на рис. 11.8, $в$ точек.

Для каждого из выбранных моментов времени построим линии магнитной индукции, охватывающие одинаково направленные токи в обмотке статора, и по правилу буравчика определим направление суммарного магнитного потока. Нетрудно заметить, что направление суммарного магнитного потока изменяется.

Суммарный магнитный поток вращается по направлению движения часовой стрелки и совершает в течение периода один оборот. Таким образом магнитный поток вращается с той же скоростью, с которой изменяются токи в фазах обмотки.

Анализируя это явление, можно сделать вывод, что необходимым и достаточным условием получения вращающегося магнитного поля в двигателе переменного тока является двойной сдвиг: сдвиг фаз обмотки статора относительно друг друга в пространстве и сдвиг протекающих в фазах обмотки синусоидальных токов во времени на один и тот же угол.

Принцип действия асинхронных электродвигателей. Принцип действия электродвигателей трехфазного тока основан на явлении вращающегося магнитного потока, который создается трехфазной обмоткой статора. Внутри статора помещен стальной барабан — ротор. Вдоль образующих ротора в пазах уложены провода, соединенные между собой на обоих торцах кольцами. Такая конструкция обмотки по аналогии называется *беличьей клеткой*.

Вращающийся магнитный поток статора, пересекая проводники обмотки ротора, в силу явления электромагнитной индукции наводит в них ЭДС. Так как проводники замкнуты, наведенные ЭДС вызывают в проводниках ток. Ток, взаимодействуя с вращающимся магнитным потоком, создает силу, увлекающую ротор вслед за вращающимся потоком. В этом легко убедиться, применив при рассуждении правило правой, а затем левой руки. Применяя правило правой руки, надо использовать принцип относи-

тельности движения — движение проводников рамки против вращающегося поля.

Скорость вращения ротора всегда меньше скорости поля. Ротор «скользит» относительно поля. Вращение рамки со скоростью поля невозможно, так как при этом поле не пересекает проводников ротора, не наводится ЭДС, отсутствуют ток и электромагнитные силы. Ротор начинает останавливаться. При этом восстанавливается пересечение проводников магнитными линиями, возникает ЭДС, ток и электромагнитные силы. Поэтому электрические двигатели, работающие по этому принципу, называются *асинхронными*.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение трехфазной системы ЭДС (симметричной и несимметричной).
2. Какое соединение обмоток трехфазного генератора называется звездой?
3. Как связаны линейное и фазное напряжения при соединении обмоток генератора звездой?
4. Какое соединение обмоток генератора называется соединением треугольником? Как связаны линейное и фазное напряжения при соединении обмоток генератора треугольником?
5. Изобразите схему связанной четырехпроводной трехфазной цепи и покажите на ней направления напряжений и токов.
6. В каком соотношении находятся фазные и линейные токи в трехфазной цепи при соединении фаз приемника звездой?
7. Что понимают под смещением нейтрали и каковы его последствия? Почему в нулевом проводе никогда не устанавливают предохранители?
8. Какие принудительные меры применяют на практике для предупреждения смещения нейтрали и зачем?
9. Что является необходимым и достаточным условием получения вращающегося магнитного поля в трехфазном электродвигателе?
10. Дайте обоснование возможности получения вращающегося магнитного поля.
11. Для чего обмотка трехфазного электродвигателя делается короткозамкнутой, в виде беличьей клетки?
12. Опишите принцип работы трехфазного электродвигателя. Почему он называется асинхронным?

12.1. Законы коммутации

Условие возникновения переходных процессов в электрических цепях. Ранее в основном рассматривалась работа электрических цепей постоянного и переменного токов *в установившемся режиме*. Этот режим характеризуется тем, что электрические характеристики (напряжения, токи и др.) во всех участках цепи остаются неизменными (в случае постоянного тока) или законы изменения названных величин остаются неизменными (в случае переменного тока) в течение сколь угодно большого промежутка времени.

При расчете электрических цепей до сих пор не учитывался тот факт, что электрические величины достигают установившихся значений не сразу. После любого мгновенного изменения режима работы электрической цепи в ней в течение определенного интервала времени (теоретически бесконечно большого) протекают так называемые *переходные процессы*, препятствующие мгновенному достижению установившихся значений электрических величин.

Переходный процесс возникает в момент *коммутации* — при включении или отключении источников питания, а также включении или отключении каких-либо участков цепи или ее элементов (R , L или C) — и продолжается до наступления установившихся значений токов и напряжений. Таким образом, условием возникновения переходного процесса является любая коммутация в электрической цепи.

Переходные процессы в электрических цепях с разным характером (активно-индуктивным или активно-емкостным) обусловлены не одинаковыми физическими причинами и имеют свои особенности.

Рассмотрим по отдельности важнейшие закономерности переходных процессов в цепях с активным сопротивлением и индуктивностью и в цепях с активным сопротивлением и емкостью.

Первый закон коммутации. Рассмотрим цепь с сопротивлением R и индуктивностью L при включении ее на постоянное напряжение (рис. 12.1, *a*).

До замыкания рубильника S установившийся режим характеризуется тем, что напряжение u и ток i в цепи равны нулю. После

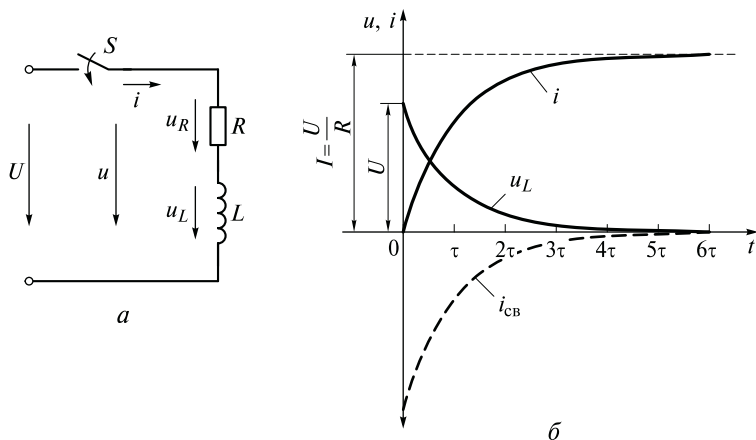


Рис. 12.1. Включение катушки индуктивности на постоянное напряжение:

a — схема цепи; *б* — графики переходного процесса

замыкания рубильника напряжение u изменилось до значения U . Новое установившееся состояние цепи будет характеризоваться постоянными значениями тока I , магнитного потока Φ , энергии магнитного поля W , мощности P :

$$I = \frac{U}{R}; \Phi = \frac{LI}{w}; W = \frac{LI^2}{2}; P = I^2R.$$

Между двумя установившимися режимами, соответствующими разомкнутому и замкнутому положениям рубильника S , в течение некоторого времени протекает переходный процесс, когда ток в катушке увеличивается от нуля до значения $i = I$.

В соответствии с законом электромагнитной индукции (см. гл. 7) при изменении тока в катушке возникает ЭДС самоиндукции e_L .

Для цепи (см. рис. 12.1, *a*) справедливо уравнение, составленное по второму закону Кирхгофа:

$$U = u_R + u_L = iR + (-e_L). \quad (12.1)$$

Здесь ЭДС самоиндукции e_L согласно формуле (7.7)

$$e_L = -L \frac{di}{dt}.$$

Предположим, что ток в катушке изменился от 0 до I скачком, в момент замыкания рубильника S , т.е. мгновенно: $\Delta t \rightarrow 0$. Это вызвало бы появление бесконечно большой ЭДС самоиндукции:

$$e_L = -L \frac{di}{dt} \approx -L \frac{\Delta i}{\Delta t} = -L \frac{I}{\Delta t} \rightarrow \infty.$$

Для создания такого значения ЭДС самоиндукции требуется источник с напряжением $U = \infty$, что следует из формулы (12.1).

Кроме того, источник питания цепи должен был бы развить бесконечно большую мощность

$$p = \frac{dW}{dt} \approx \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{LI^2 / 2}{\Delta t} \rightarrow \infty.$$

В реальных цепях переход из одного установившегося режима в другой происходит при конечных значениях мощностей и напряжений источников питания. Из этого можно заключить, что переходный процесс происходит не мгновенно, а в течение какого-то конечного промежутка времени.

Таким образом, *мгновенное значение тока в ветви с индуктивностью в первый момент переходного периода остается таким, каким оно было в последний момент предшествующего установившегося режима*. Этот вывод и составляет содержание *первого закона коммутации*.

Второй закон коммутации. Рассмотрим теперь цепь с сопротивлением R и емкостью C при включении ее на постоянное напряжение (рис. 12.2, *a*).

До замыкания рубильника S установившийся режим характеризуется тем, что напряжение u и ток i в цепи равны нулю. После замыкания рубильника напряжение u изменилось до значения U .

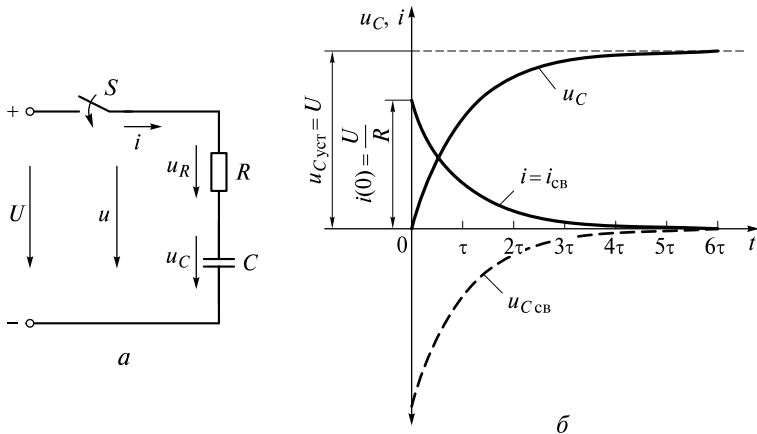


Рис. 12.2. Включение конденсатора на постоянное напряжение:
a — схема цепи; *б* — графики переходного процесса

Конденсатор начинает заряжаться, и напряжение на конденсаторе u_C растет. Для электрической цепи (см. рис. 12.2, а) справедливо уравнение, составленное по второму закону Кирхгофа, характеризующее электрическое состояние цепи:

$$U = u_R + u_C = iR + u_C. \quad (12.2)$$

Причем ток в цепи согласно формуле (9.21) пропорционален скорости изменения напряжения на емкости:

$$i = C \frac{du_C}{dt}.$$

В установившемся режиме после замыкания рубильника S напряжение на емкости u_C достигает значения U , после чего не изменяется. Согласно формуле (9.21) ток в цепи становится равным нулю: $i = 0$, т. е. цепь разомкнута емкостью.

Докажем, что напряжение на конденсаторе после замыкания рубильника S не изменяется скачком. Предположим, что в момент замыкания рубильника напряжение на емкости изменилось от 0 до U скачком, т. е. $\Delta t \rightarrow 0$. Это вызвало бы возрастание до бесконечности зарядного тока конденсатора:

$$i = C \frac{du_C}{dt} \approx C \frac{\Delta u_C}{\Delta t} = C \frac{U}{\Delta t} \rightarrow \infty.$$

Для создания такого значения тока в цепи требуется источник с напряжением $U = \infty$, что следует из формулы (12.2).

Кроме того, после замыкания рубильника энергия источника питания изменится от 0 до $CU^2/2$. Если $\Delta t \rightarrow 0$, источник питания цепи должен развить бесконечно большую мощность:

$$p = \frac{dW}{dt} \approx \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{CU^2/2}{\Delta t} \rightarrow \infty.$$

В реальных цепях переход из одного установившегося режима в другой происходит при конечных значениях мощностей и напряжений источников питания. Из этого можно заключить, что переходный процесс происходит не мгновенно, а в течение какого-то конечного промежутка времени.

Таким образом, *напряжение на емкости не может измениться скачком. В момент, непосредственно следующий за коммутацией, напряжение на емкости имеет то же значение, которое было в момент, непосредственно предшествующий коммутации.* Этот вывод называется *вторым законом коммутации*.

Изучение переходных процессов очень важно в устройствах радиотехники, электроники, автоматики для оценки тех измене-

ний, которые переходные процессы вносят в электрические сигналы. Несмотря на то что длительность переходных процессов невелика (чаще всего составляет десятые, сотые доли секунды), в переходные периоды возможны резкие увеличения напряжений и токов, которые могут оказаться опасными для электрических установок.

12.2. Включение RL -цепи на постоянное напряжение

Закон изменения тока в цепи во время переходного процесса. В неразветвленной цепи с сопротивлением и индуктивностью (см. рис. 12.1, *a*) закон изменения тока во время переходного процесса можно получить, решив дифференциальное уравнение (12.1):

$$U = iR + L \frac{di}{dt}, \text{ или (после разделения переменных)}$$

$$\frac{di}{\frac{U}{R} - i} = \frac{R}{L} dt.$$

Умножим полученное уравнение на (-1) и проинтегрируем обе его части:

$$\int \frac{di}{i - \frac{U}{R}} = -\int \frac{R}{L} dt.$$

В результате интегрирования получим:

$$\ln\left(i - \frac{U}{R}\right) - \ln K = -\frac{R}{L}t, \text{ или } \ln\left(\frac{i - \frac{U}{R}}{K}\right) = -\frac{R}{L}t,$$

где K — постоянная интегрирования.

Из определения логарифма получим:

$$e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{i - \frac{U}{R}}{K}, \text{ или } i = \frac{U}{R} + Ke^{-\frac{R}{L}t},$$

где K определяется из начальных условий.

Для этого определим значение тока i в начале переходного процесса (при $t = 0$), т. е. в первый момент времени после включения

рубильника. Согласно первому закону коммутации в момент сразу после коммутации ток в цепи равен току в последний момент перед коммутацией, т.е. $i = 0$.

Подставляя в уравнение тока значения $t = 0$ и $i = 0$, получим

$$K = -\frac{U}{R}.$$

Так как величина K является постоянной для любого момента времени, то закон изменения тока при включении RL -цепи на постоянное напряжение имеет вид

$$i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = I \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (12.3)$$

где $I = \frac{U}{R}$ — установившееся значение тока;

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (12.4)$$

принято называть *постоянной времени* цепи с катушкой.

Постоянная времени τ имеет размерность времени:

$$[\tau] = \left[\frac{L}{R} \right] = \frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} = \text{с}.$$

От постоянной времени τ зависит, насколько быстро протекает переходный процесс. График зависимости тока от времени, соответствующий уравнению (12.3), представлен на рис. 12.1, б (кривая i). Скорость нарастания тока в течение переходного периода непрерывно уменьшается, крутизна кривой падает, ток асимптотически стремится к установившемуся значению тока I .

В табл. 12.1 приведены значения тока i в цепи, рассчитанные в процентном отношении к установившемуся току I в соответствии с формулой (12.3) через интервалы времени, равные постоянной времени τ .

Таблица 12.1

Изменение величин i и u_L во время переходного процесса

$t, \text{с}$	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ
$i/I, \%$	63,21	86,47	95,02	98,17	99,33	99,75
$u_L/U, \%$	36,79	13,53	4,98	1,83	0,67	0,25

Независимо от того, какое конкретное значение принимает τ , через промежутки времени, равные τ , ток i принимает значения, указанные в табл. 12.1. Из этого следует, что длительность переходного процесса зависит от постоянной времени τ . Чем меньше τ , тем быстрее ток достигает установившегося значения, и наоборот. Постоянная времени согласно формуле (12.4) зависит от L и R цепи. Таким образом, чем меньше индуктивность и больше сопротивление цепи, тем быстрее протекает переходный процесс.

Переходный процесс теоретически продолжается бесконечно долго, так как согласно формуле (12.3) $i = I$ при $t = \infty$. На практике принято считать переходный процесс законченным по истечении времени $t = 4\tau$, когда значение тока отличается менее чем на 2% от установившегося значения (см. табл. 12.1).

Установившаяся и свободная составляющие тока переходного процесса. Анализируя выражение (12.3), можно заметить, что ток переходного процесса состоит из двух составляющих, одна из которых — постоянная величина, вторая изменяется с течением времени.

Первая составляющая тока переходного процесса (переходного тока) равна установившемуся значению тока после окончания переходного процесса и не зависит от времени. Она определяется действием источника постоянного напряжения и называется *принужденной, или установившейся, составляющей*

$$i_{\text{уст}} = I = \frac{U}{R}. \quad (12.5)$$

Вторая составляющая тока переходного процесса, носящая название *свободной составляющей* $i_{\text{св}}$, существует только во время переходного процесса, т.е. все то время, пока в цепи идет накопление энергии магнитного поля за счет энергии источника. По мере возрастания энергии магнитного поля свободная составляющая убывает по экспоненциальному закону (кривая $i_{\text{св}}$, см. рис. 12.1, б). В рассматриваемом случае (включение RL -цепи на постоянное напряжение) свободная составляющая тока

$$i_{\text{св}} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = I e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

В общем случае свободная составляющая тока

$$i_{\text{св}} = K e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (12.6)$$

где K — постоянная интегрирования, которая определяется из начальных условий, т.е. при $t = 0$ и с учетом первого закона коммутации.

Таким образом, ток переходного процесса

$$i = i_{\text{уст}} + i_{\text{св}}. \quad (12.7)$$

Закон изменения напряжения на индуктивности во время переходного процесса. Из уравнения (12.1), отражающего баланс напряжений в цепи (см. рис. 12.1, а), определим напряжение на индуктивности u_L — ту часть напряжения источника питания, которая уравнивает ЭДС самоиндукции e_L :

$$u_L = U - u_R = U - iR.$$

Подставив в полученное уравнение выражение (12.3), получим закон изменения напряжения на индуктивности при включении RL -цепи на постоянное напряжение:

$$u_L = U - iR = U - U \frac{R}{R} + U \frac{R}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = U e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Индуктивное напряжение во время переходного процесса выражается только свободной составляющей

$$u_L = u_{L\text{св}} = U e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (12.8)$$

Из формулы (12.8) следует, что по мере возрастания в цепи энергии магнитного поля напряжение на индуктивности u_L уменьшается по экспоненциальному закону (кривая u_L , см. рис. 12.1, б).

Значения u_L , полученные согласно формуле (12.8), представлены в табл. 12.1.

В установившемся режиме (при $t = \infty$) напряжение на индуктивности $u_{L\text{уст}} = 0$, напряжение источника U полностью приложено к сопротивлению R ($u_{R\text{уст}} = U$). В установившемся режиме ток определяется только сопротивлением R (см. формулу (12.5)), а индуктивность L не влияет на численное значение тока.

Выведенные законы изменения тока в цепи и напряжения на индуктивности справедливы только для линейных цепей, когда параметры цепи можно считать постоянными величинами.

12.3. Отключение RL -цепи от источника постоянного напряжения

Разрыв RL -цепи. Рассмотрим случай обычного размыкания электрической цепи, обладающей активным сопротивлением R и индуктивностью L , т.е. отключение цепи от источника напряжения в результате разрыва цепи.

При отключении цепи с помощью ключа его контакты расходятся, и в цепь последовательно с ее элементами включается сопротивление воздушного промежутка, возникающего между удаляющимися друг от друга контактами. Если проводимость воздуха мала, то сразу после разрыва цепи ток в цепи начинает стремительно уменьшаться, в результате чего за счет уменьшения энергии магнитного поля, накопленной в индуктивности, в цепи возникает ЭДС самоиндукции.

Скорость изменения тока в момент обрыва цепи стремится к бесконечности, поэтому величина ЭДС самоиндукции достигает больших значений:

$$\frac{di}{dt} \rightarrow \infty; e_L = -L \frac{di}{dt} \rightarrow \infty.$$

В этом случае в момент разрыва цепи между расходящимися контактами выключателя возникает напряжение u_k , равное сумме напряжения источника и ЭДС самоиндукции:

$$u_k = U + e_L.$$

Под действием сильного электрического поля происходит ионизация воздуха. Воздушный промежуток между расходящимися контактами пробивается, образуется искра.

Таким образом, ток в цепи сохраняется некоторое время после начала расхождения контактов. При большой мощности источника искровой разряд может перейти в дуговой. Для разрыва таких цепей применяются специальные отключающие аппараты, которые, как правило, снабжаются дугогасительными приспособлениями, конструкция которых зависит от мощности цепи и рабочего напряжения установки.

Если учесть, что газовый промежуток между расходящимися контактами ключа обладает проводимостью и ток в цепи уменьшается до нуля не мгновенно, то следует подчеркнуть, что отключение сильноточных цепей (сотни, тысячи ампер и более) протекает очень тяжело для выключающей аппаратуры.

В связи с этим применяются и другие способы отключения индуктивных цепей от источника постоянного напряжения.

Короткое замыкание RL -цепи при одновременном отключении цепи от источника постоянного напряжения. Рассмотрим отключение RL -цепи от источника постоянного напряжения при одновременном ее замыкании накоротко (рис. 12.3, а). Таким способом выключаются, например, обмотки возбуждения машин постоянного тока.

Закон изменения тока в цепи во время переходного процесса. До указанного переключения режим ра-

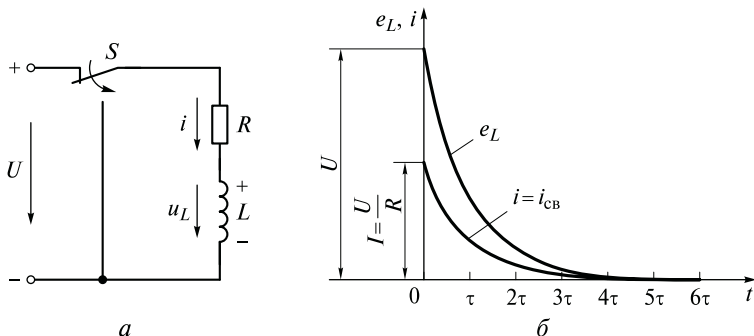


Рис. 12.3. Отключение катушки от источника постоянного напряжения: *a* — схема цепи; *б* — графики переходного процесса в короткозамкнутой RL -цепи после ее отключения от источника постоянного напряжения

боты цепи характеризовался постоянным установившимся током

$$I = \frac{U}{R}.$$

После переключения ток не прекращается. Ток поддерживается за счет энергии, накопленной в магнитном поле катушки. Так как большое сопротивление воздушного промежутка и встречно направленная ЭДС источника препятствуют ответвлению тока в цепь источника, ток протекает в образовавшемся короткозамкнутом контуре.

Поскольку в активном сопротивлении R при протекании тока совершается необратимый процесс превращения электрической энергии в тепловую, запас энергии в магнитном поле непрерывно уменьшается.

Согласно формуле (5.59) вместе с уменьшением энергии магнитного поля уменьшается ток в цепи. В результате уменьшения тока в индуктивности цепи возникает ЭДС самоиндукции. Таким образом, в течение переходного процесса индуктивность является источником электрической энергии с напряжением на зажимах, равным ЭДС самоиндукции.

Закон изменения тока в цепи во время переходного процесса можно определить из уравнения баланса напряжений (12.1) при напряжении источника $U = 0$:

$$0 = iR - e_L = iR + L \frac{di}{dt}.$$

После разделения переменных получим

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt.$$

Проинтегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} \int dt.$$

В результате интегрирования получим:

$$\ln i - \ln K = -\frac{R}{L} t, \text{ или } \ln \frac{i}{K} = -\frac{R}{L} t.$$

Отсюда

$$i = Ke^{-\frac{R}{L}t}, \quad (12.9)$$

где K — постоянная интегрирования, которая определяется из начальных условий согласно первому закону коммутации.

Определим постоянную интегрирования K . Для этого установим значение тока в начале переходного процесса, т. е. в первый момент времени после переключения, при $t = 0$. Установившийся режим, предшествующий отключению цепи, характеризуется током

$$I = \frac{U}{R}.$$

Согласно первому закону коммутации этот ток сохраняется и в первый момент переходного режима, поэтому при $t = 0$

$$i(0) = I = \frac{U}{R}.$$

Подставляя в уравнение (12.9) значения $t = 0$ и $i(0)$, получим:

$$i(0) = Ke^0; K = I = \frac{U}{R}.$$

Подставив в уравнение (12.9) значение K , получим закон изменения тока во время переходного процесса при отключении RL -цепи от источника постоянного напряжения при одновременном ее замыкании накоротко:

$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = Ie^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (12.10)$$

где τ — постоянная времени RL -цепи, $\tau = \frac{L}{R}$.

Ток переходного процесса в рассматриваемом случае содержит только свободную составляющую: $i = i_{св}$. Согласно формуле (12.10) ток уменьшается по экспоненциальному закону от значения $i = I$ до нового установившегося значения $i_{уст} = 0$ (кривая i , рис. 12.3, б).

Численное значение постоянной времени τ цепи определяет время переходного процесса. Чем меньше τ , тем быстрее заканчивается переходный процесс, так как независимо от величины τ за время, равное τ , ток i изменяется в e раз от своего первоначального значения, что следует из формулы (12.10). Длительность переходного процесса в данном случае, как и при включении RL -цепи, теоретически равна бесконечности, а практически при $t = 4\tau$ значение тока можно считать равным нулю.

Закон изменения ЭДС самоиндукции. ЭДС самоиндукции возникает в короткозамкнутой цепи в результате уменьшения тока. Поэтому, подставив в уравнение (7.7) выражение тока (12.10) и продифференцировав его, получим:

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d(Ie^{-\frac{t}{\tau}})}{dt} = LI \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = L \frac{U}{R} \frac{R}{L} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

или

$$e_L = Ue^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (12.11)$$

В общем случае ЭДС самоиндукции имеет наибольшее значение, равное напряжению U на выводах RL -цепи момент в ее коммутации.

График изменения ЭДС самоиндукции показан на рис. 12.3, б (кривая e_L).

12.4. Переходные процессы в цепи с конденсатором при постоянном напряжении на ее зажимах

Включение RC -цепи на постоянное напряжение. При включении цепи (см. рис. 12.2, а) в ней начинает протекать зарядный ток, который заряжает конденсатор. При этом имеет место переходный процесс: напряжение на обкладках конденсатора не изменяется мгновенно, скачком, а нарастает постепенно от нуля до напряжения источника энергии.

Закон изменения напряжения u_C на обкладках конденсатора RC -цепи может быть определен из уравнения баланса напряжений (12.2):

$$U = iR + u_C.$$

Подставляя в уравнение (12.2) выражение тока

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{Cdu_C}{dt},$$

получим дифференциальное уравнение

$$\frac{RCdu_C}{dt} = U - u_C.$$

После разделения переменных (u_C и t) это уравнение примет вид

$$\frac{du_C}{u_C - U} = -\frac{dt}{RC}.$$

После интегрирования этого уравнения и дальнейших преобразований получим следующее решение:

$$u_C = U + Ke^{-\frac{t}{RC}}, \quad (12.12)$$

где K — постоянная интегрирования, которая определяется из начальных условий.

Приступим к определению K . Согласно второму закону коммутации в начальный момент времени напряжение на конденсаторе равно нулю. Подставляя значения $t = 0$ и $u_C(0) = 0$ в уравнение (12.12), получим

$$K = -U.$$

Закон изменения напряжения на емкости при включении RC -цепи

$$u_C = U \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (12.13)$$

где τ — постоянная времени RC -цепи:

$$\tau = RC. \quad (12.14)$$

Закон изменения зарядного тока RC -цепи. Зарядный ток согласно формуле (12.2)

$$i = \frac{U - u_C}{R}. \quad (12.15)$$

Подставляя выражение (12.13) в выражение тока (12.15), получим закон изменения зарядного тока:

$$i = \frac{U - u_C}{R} = \frac{U - U + Ue^{-\frac{t}{\tau}}}{R} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (12.16)$$

Кривые зависимости напряжения u_C и зарядного тока i от времени t показаны на рис. 12.2, б.

При включении RC -цепи на постоянное напряжение u_C на конденсаторе растет, а ток i уменьшается по экспоненциальным законам. Напряжение u_C асимптотически стремится к установившемуся значению U , а зарядный ток i — к нулю. При этом скорость увеличения напряжения на емкости и уменьшения тока в цепи в течение переходного процесса непрерывно снижаются.

Теоретически переходный процесс продолжается бесконечно долго: $u_C = U$ и $i = 0$ при $t = \infty$. Длительность переходного процесса зависит от постоянной времени цепи $\tau = RC$. Чем больше постоянная времени τ , т. е. чем больше сопротивление R и емкость C , тем медленнее заряжается конденсатор.

Процесс зарядки считается практически законченным при $t = 4\tau$.

Как видно из уравнения (12.13), напряжение на емкости в переходный период можно считать состоящим из суммы двух составляющих: установившегося значения $u_{C\text{уст}}$ и свободной составляющей $u_{C\text{св}}$:

$$u_C = u_{C\text{уст}} + u_{C\text{св}},$$

где

$$u_{C\text{уст}} = U; \quad u_{C\text{св}} = -Ue^{-\frac{t}{RC}}. \quad (12.17)$$

Зарядный ток равен свободной составляющей:

$$i = i_{\text{св}} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (12.18)$$

Ток установившегося режима равен нулю:

$$i_{\text{уст}} = 0.$$

Разрядка конденсатора на активное сопротивление. Рассмотрим отключение RC -цепи от источника постоянного напряжения при одновременном ее замыкании накоротко. Емкость, заряженная до напряжения $u_C = U$, отключается от источника энергии, и одновременно ее обкладки замыкаются на сопротивление R (рис. 12.4, а).

После переключения начинается разрядка емкости, возникает разрядный ток (см. рис. 12.4, а). Ток поддерживается за счет энер-

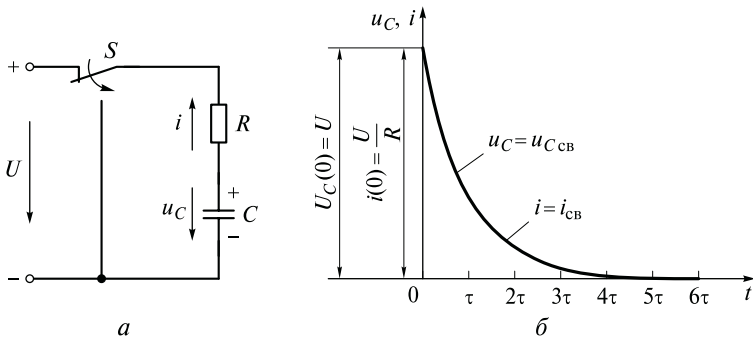


Рис. 12.4. Разрядка конденсатора на активное сопротивление:
 а — схема разрядки; б — графики переходного процесса в цепи

гии, накопленной в электрическом поле конденсатора, поэтому его направление противоположно зарядному току.

Закон изменения напряжения u_C на обкладках конденсатора RC -цепи может быть определен из уравнения баланса напряжений для рассматриваемой цепи:

$$u_C = iR. \quad (12.19)$$

Подставляя в формулу (12.19) выражение тока (9.21) со знаком «-» (знак «-» в уравнении тока отражает уменьшение заряда на обкладках конденсатора при разрядке — отрицательное приращение)

$$i = -\frac{dq}{dt} = -\frac{Cdu_C}{dt},$$

получим дифференциальное уравнение с одной переменной u_C :

$$u_C = -RC \frac{du_C}{dt}.$$

После разделения переменных это уравнение примет вид

$$\frac{du_C}{u_C} = -\frac{dt}{RC}.$$

После интегрирования последнего уравнения и последующих преобразований получим решение в виде уравнения

$$u_C = Ke^{-\frac{t}{RC}}, \quad (12.20)$$

где K — постоянная интегрирования, которая находится из начальных условий.

Согласно второму закону коммутации в начальный момент времени напряжение на конденсаторе равно напряжению источника U . Подставляя значения $t = 0$ и $u_C(0) = U$ в уравнение (12.20), получим

$$K = U.$$

Закон изменения напряжения на емкости с учетом полученного значения постоянной интегрирования K :

$$u_C = u_{C\text{св}} = Ue^{-\frac{t}{RC}} = Ue^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (12.21)$$

где $\tau = RC$ — постоянная времени RC -цепи.

Закон изменения разрядного тока RC -цепи. Разрядный ток можно выразить из выражения (12.19):

$$i = i_{\text{св}} = \frac{u_C}{R} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (12.22)$$

На рис. 12.4, б показаны графики изменения напряжения u_C и тока i при разрядке. В соответствии с формулами (12.21) и (12.22) напряжение на конденсаторе и ток в цепи уменьшаются по экспоненциальным законам до нуля, по мере того как накопленная энергия электрического поля конденсатора ($W_C = CU^2/2$) уменьшается до нуля в установившемся режиме. Таким образом, $u_{\text{уст}} = 0$ и $i_{\text{уст}} = 0$. Напряжение и ток при разрядке конденсатора равны их свободным составляющим.

Длительность переходного процесса при разрядке конденсатора определяется постоянной времени τ и составляет $(4 \dots 6)\tau$, аналогично всем предыдущим рассмотренным случаям.

12.5. Переходные процессы в электрических цепях синусоидального тока

При включении, выключении и при скачкообразных изменениях каких-либо параметров в цепях переменного тока также возникают переходные процессы. Они искажают форму синусоидальных токов в цепях или напряжений на их элементах. В определенных случаях амплитуды колебаний токов или напряжений могут достигать опасных для цепей значений. Длительность переходных процессов зависит, как и в цепях постоянного тока, от параметров самих цепей. По окончании переходных процессов, в установившемся режиме, форма токов и напряжений восстанавливает-

ся, а их значения могут быть определены методами, рассмотренными в гл. 8... 10.

Рассмотрим пример вывода закономерностей переходных процессов в RL -цепи синусоидального тока.

Рассмотрим включение участка электрической цепи с активным сопротивлением R и индуктивностью L (см. рис. 12.1) не на постоянное, а на синусоидальное напряжение.

Вывод закона изменения тока во время переходного процесса. Начало отсчета времени ($t = 0$) совместим с моментом включения цепи. Пусть напряжение источника питания определяется уравнением

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi), \quad (12.23)$$

где ψ — начальная фаза напряжения.

В момент включения цепи напряжение имеет значение

$$u = U_m \sin \psi.$$

Как видно (см. формулу (12.7)), ток в цепи во время переходного процесса может быть представлен суммой установившейся и свободной составляющих:

$$i = i_{\text{уст}} + i_{\text{св}}.$$

В установившемся режиме синусоидальный ток в катушке отстает от напряжения на угол φ , определяемый соотношением ее активного и индуктивного сопротивлений:

$$i_{\text{уст}} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi), \quad (12.24)$$

где $I_m = \frac{U_m}{z}$; $z = \sqrt{R^2 + x_L^2}$; $\text{tg } \varphi = \frac{x_L}{R}$.

Свободная составляющая тока не зависит от формы напряжения источника и изменяется по такому же закону (см. формулу (12.6)), что и при включении катушки на постоянное напряжение:

$$i_{\text{св}} = K e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где K — постоянная интегрирования, которая определяется из начальных условий; $\tau = L/R$ — постоянная времени цепи.

Подставляя в уравнение (12.7) выражения (12.24) и (12.6), получим уравнение тока i в цепи

$$i = i_{\text{уст}} + i_{\text{св}} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + K e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (12.25)$$

Определим постоянную интегрирования K из начальных условий. Для этого в выражение (12.25) подставим значение $t = 0$:

$$i(0) = i_{\text{уст}}(0) + i_{\text{св}}(0) = I_m \sin(\psi - \varphi) + K.$$

С другой стороны, согласно первому закону коммутации в начальный момент времени ($t = 0$) ток $i(0) = 0$, так как ранее цепь была разомкнута, а ток в катушке скачком измениться не может.

Подставляя в последнее уравнение значение $i(0) = 0$, получим

$$0 = I_m \sin(\psi - \varphi) + K.$$

Откуда постоянная интегрирования

$$K = -I_m \sin(\psi - \varphi).$$

Подставляя полученное выражение K в формулу (12.25), получим закон изменения тока в RL -цепи во время переходного процесса при включении цепи на синусоидальное напряжение:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (12.26)$$

Свободная составляющая тока

$$i_{\text{св}} = -I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (12.27)$$

Оказывается, в момент включения ($t = 0$) свободная составляющая тока (см. формулу (12.27)) равна по величине принужденной (установившейся) составляющей (см. формулу (12.24)), но направлена противоположно:

$$i_{\text{св}}(0) = -i_{\text{уст}}(0) = -I_m \sin(\psi - \varphi). \quad (12.28)$$

Кривые переходного тока и его составляющих показаны на рис. 12.5, а.

Из уравнений (11.24) и (11.27) следует, что значения принужденной и свободной составляющих в начальный момент времени зависят от соотношения между начальной фазой напряжения ψ (которая определяется моментом включения цепи) и углом сдвига фаз φ (который определяется параметрами цепи).

Если в момент включения ($t = 0$) начальная фаза напряжения равна углу сдвига фаз ($\psi = \varphi$), установившаяся и свободная составляющие тока будут равны нулю: $i_{\text{св}} = -i_{\text{уст}} = 0$. В этом случае переходный период отсутствует, и в цепи с первого момента после включения существует установившийся режим (рис. 12.5, б).

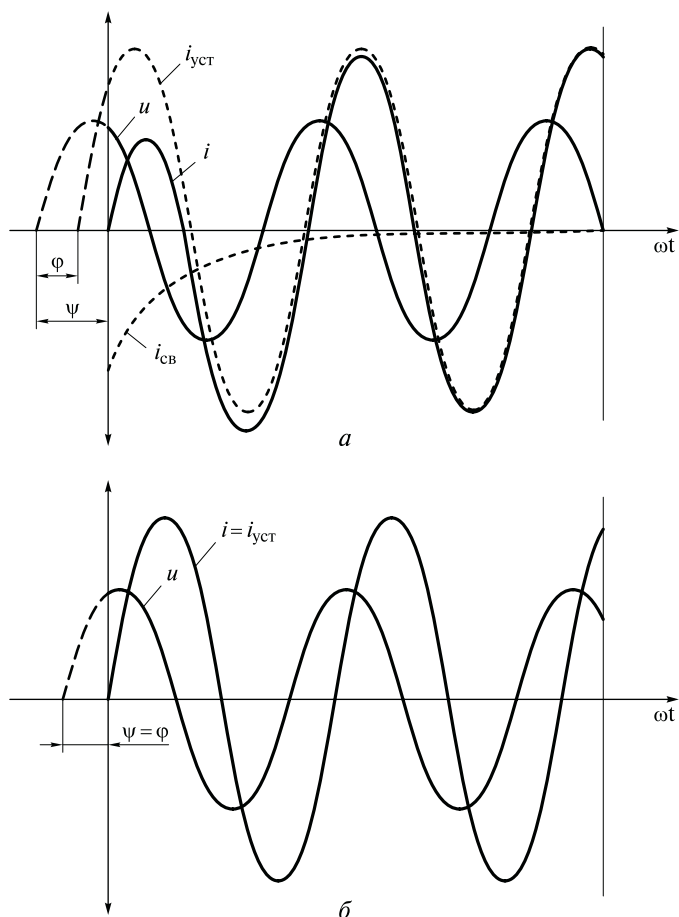


Рис. 12.5. Переходный процесс в RL -цепи при включении ее к источнику синусоидального напряжения:

$a - \psi \neq \varphi$; $b - \psi = \varphi$

Наибольшее значение свободного тока в начальный момент времени может быть равным амплитуде установившегося тока. Это происходит, когда $\psi = \varphi + 90^\circ$ (рис. 12.6). При этом в момент включения значение установившегося тока равно амплитуде I_m , а значение свободной составляющей — амплитуде с обратным знаком:

$$i_{св}(0) = -I_m \sin(\varphi + 90^\circ - \varphi) = -I_m.$$

В дальнейшем свободный ток $i_{св}$ уменьшается по экспоненциальному закону (см. формулу (12.27)) с быстротой, зависящей от величины постоянной времени цепи. Переходный процесс за вре-

мя $(4...6)\tau$ затухает, а ток i в цепи приближается к установившемуся значению. В цепях с большой постоянной времени τ (с большим значением индуктивности и малым сопротивлением) свободный ток затухает медленно. В этом случае переходный ток в течение первого полупериода может достигнуть значения, равно почти удвоенной амплитуде установившегося тока:

$$i_{\max} \approx 2I_m.$$

Аналогичным образом можно вывести закономерности переходных процессов в цепях синусоидального тока в других случаях, например включение RC -цепи к источнику синусоидального напряжения, короткое замыкание в цепи переменного тока и т. д.

Во всех перечисленных случаях ток переходного процесса зависит от значений начальной фазы напряжения в момент изменения в цепи и угла сдвига фаз между напряжением и током после изменения в цепи. В самом неблагоприятном варианте переходный ток может достигать значения, близкого к удвоенному значению амплитуды установившегося тока: $i_{\max} \approx 2I_m$. В случае короткого замыкания наибольшее мгновенное значение тока называют *ударным током*.

Максимальный переходный ток в цепях переменного тока представляет опасность для реальных электроустановок и потребителей электрической энергии. Поэтому с наличием переходных процессов в цепях переменного тока приходится считаться.

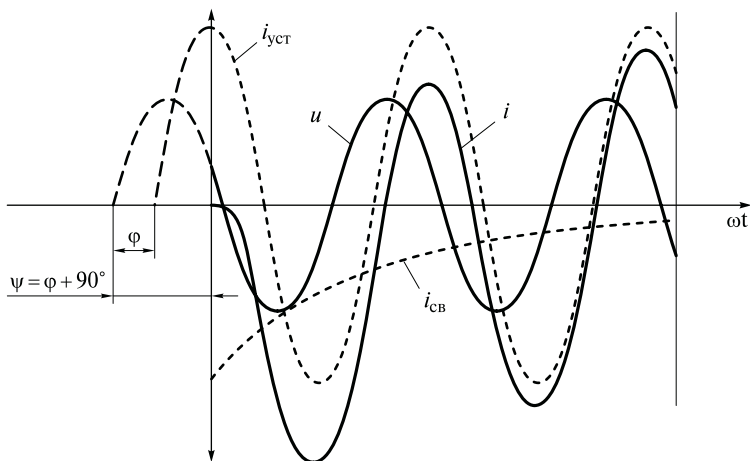


Рис. 12.6. Включение RL -цепи к источнику синусоидального напряжения в момент, когда $\psi = \varphi + 90^\circ$

Контрольные вопросы

1. Какие процессы в электрической цепи называются переходными? Что препятствует мгновенному изменению тока в катушке при ее отключении или подключении к источнику питания?

2. Чему равно напряжение на индуктивности сразу после включения катушки на напряжение? От чего зависит длительность переходного процесса при коммутации RL -цепи?

3. Напишите закон изменения напряжения на активном сопротивлении RL -цепи во время переходного процесса.

4. Чем объясняется появление дугообразного разряда в месте разрыва RL -цепи? Какие меры предусматриваются для безопасности при отключении RL -цепи?

5. Сформулируйте законы изменения напряжений на емкости и активном сопротивлении цепи при зарядке конденсатора.

6. Что препятствует мгновенному изменению напряжения на конденсаторе при его отключении и подключении к источнику питания?

7. От чего зависит длительность переходного процесса при зарядке конденсатора и как ее уменьшить?

8. Чему равен ток в цепи при разрядке конденсатора на активное сопротивление в начале разрядки и в установившемся режиме?

9. В каком случае после подключения катушки к источнику синусоидального напряжения отсутствует переходный период? В каком случае переходный ток наибольший?

10. Что называют ударным током короткого замыкания? Какова его наибольшая величина?

Глава 13

ТРАНСФОРМАТОРЫ

13.1. Общие сведения

Назначение трансформаторов. *Трансформатор* представляет собой статическое электромагнитное устройство, имеющее две (или более) индуктивно связанные обмотки, предназначенное для преобразования (посредством явления электромагнитной индукции) одной (первичной) системы переменного тока в другую (вторичную) при неизменной частоте.

С помощью трансформаторов осуществляют передачу вырабатываемой на электростанциях электрической энергии и распределение ее среди потребителей: промышленных предприятий, жилых зданий и т. д.

В процессе передачи и последующего распределения электроэнергии приходится неоднократно понижать и повышать напряжение. Места потребления могут быть удалены от электростанций на многие сотни, а часто и тысячи километров. Передачу электроэнергии на большие расстояния осуществляют при высоких напряжениях (до 500 кВ и более) и относительно малых токах, поскольку снижение силы тока при заданной передаваемой мощности обеспечивает уменьшение потерь напряжения и мощности, повышает экономичность линий электропередач. Получить такое высокое напряжение в генераторе невозможно, поэтому электроэнергия после генератора подается на повышающий трансформатор. В местах распределения и потребления электроэнергии устанавливают понижающие трансформаторы, которые понижают напряжение до требуемого значения: 380 или 220 В.

Классификация трансформаторов. Трансформаторы классифицируют по нескольким признакам:

- по области применения — на силовые трансформаторы общего назначения и трансформаторы специального назначения и другие.

Силовыми называют трансформаторы, используемые в энергетических системах и в сетях распределения электроэнергии.

К трансформаторам *специального назначения* относятся трансформаторы для устройств автоматики (пик-трансформаторы, импульсные, умножители частоты), испытательные, измерительные для включения в схемы измерительных приборов и т. д.

Для регулирования напряжения в небольших пределах и для пуска двигателей переменного тока большой мощности применяют *автотрансформаторы*.

В электронных схемах широко используют трансформаторы малой мощности (10... 600 В·А) с несколькими вторичными обмотками для питания изолированных друг от друга цепей, имеющих различные номинальные напряжения;

- по виду охлаждения — с воздушным (сухие трансформаторы) и масляным (масляные трансформаторы) охлаждением;
- по числу трансформируемых фаз — однофазные и трехфазные;
- по форме магнитопровода — стержневые, броневые, бронестержневые, тороидальные;
- по числу обмоток на фазу — двухобмоточные и многообмоточные.

Технические данные трансформаторов определяются их *номинальными параметрами*, характеризующими *номинальный режим работы* (режим, для которого трансформатор рассчитан и изготовлен):

- $U_{1\text{НОМ}}$ — номинальное первичное линейное напряжение, В;
- $U_{2\text{НОМ}}$ — номинальное вторичное линейное напряжение — напряжение на выводах вторичной обмотки при отключенной нагрузке и номинальном первичном напряжении, В;
- $I_{1\text{НОМ}}$ и $I_{2\text{НОМ}}$ — номинальные линейные токи в первичной и вторичной обмотках, А;
- $S_{\text{НОМ}}$ — номинальная полная мощность (для однофазного трансформатора $S_{\text{НОМ}} = U_{1\text{НОМ}} I_{1\text{НОМ}}$, для трехфазного — $S_{\text{НОМ}} = \sqrt{3} U_{1\text{НОМ}} I_{1\text{НОМ}}$, кВ·А).

Номинальные параметры указываются на щитке трансформаторов. Кроме того, на щитке указывается частота питающей сети.

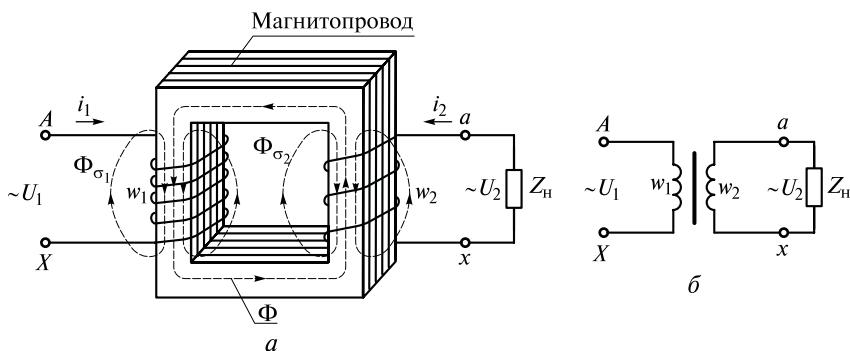


Рис. 13.1. Однофазный трансформатор:

a — электрическая цепь трансформатора; *б* — схема электрической цепи трансформатора

Устройство и схема включения однофазного трансформатора.

Несмотря на разнообразие и специфические особенности различных типов трансформаторов, происходящие в них электромагнитные процессы имеют много общих черт. Общие вопросы теории трансформаторов рассмотрены в данной главе на примере однофазного двухобмоточного силового трансформатора общего назначения.

Однофазный двухобмоточный трансформатор состоит из магнитопровода (сердечника), выполненного из ферромагнитного материала, и двух обмоток, расположенных на стержнях магнитопровода: одной *первичной* обмотки с числом витков w_1 , к которой подводится напряжение сети U_1 , и одной *вторичной* обмотки с числом витков w_2 , к которой присоединяются потребители электроэнергии Z_n (рис. 13.1, а).

Обмотки трансформатора не имеют электрической связи друг с другом. Мощность из одной обмотки в другую передается электромагнитным путем. Магнитопровод служит для усиления электромагнитной связи между обмотками трансформатора. Для уменьшения потерь на вихревые токи магнитопровод трансформатора собирают из тонких, изолированных друг от друга тонкой бумагой, лаком или окалиной, листов низко углеродистой электротехнической стали (см. подразд. 7.1).

Принято называть все величины (напряжение, ток, мощность и т. п.), относящиеся к первичной обмотке, *первичными величинами*, а относящиеся к вторичной обмотке — *вторичными*.

Если первичное напряжение меньше вторичного, то трансформатор называют *повышающим*, а если больше — *понижающим*.

Трансформаторы обладают свойством *обратимости*: одно и то же устройство можно использовать в качестве и повышающего трансформатора, и понижающего.

На схеме электрической цепи (рис. 13.1, б) показано условное графическое изображение однофазного трансформатора.

Принцип действия однофазного трансформатора. Действие трансформатора основано на явлении электромагнитной индукции (см. гл. 7). При подключении первичной обмотки трансформатора (вторичная обмотка разомкнута) к сети переменного тока с напряжением U_1 в витках этой обмотки протекает переменный ток i_1 (см. рис. 13.1, а). Под действием намагничивающей силы $i_1 w_1$ возбуждается переменный во времени магнитный поток, большая часть которого замыкается по магнитопроводу. Эту часть потока, сцепленную с обеими обмотками трансформатора, называют *основным магнитным потоком* Φ ; небольшую часть потока Φ , сцепленную только с одной первичной обмоткой, называют *первичным потоком рассеяния* $\Phi_{\sigma 1}$. Замыкаясь в магнитопроводе, переменный поток Φ наводит в обеих обмотках электродвижущие силы:

- в первичной обмотке — ЭДС самоиндукции

$$e_1 = -w_1 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (13.1)$$

- во вторичной обмотке — ЭДС взаимной индукции

$$e_2 = -w_2 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (13.2)$$

Именно так с помощью переменного магнитного потока Φ , усиленного материалом магнитопровода, осуществляется передача энергии из первичной обмотки во вторичную.

Если к вторичной обмотке присоединить потребитель электроэнергии (нагрузку Z_n), то под действием ЭДС e_2 в нем потечет переменный ток i_2 , и на выводах установится напряжение U_2 .

13.2. Теоретические основы расчета трансформатора

Первичная и вторичная ЭДС и коэффициент трансформации трансформатора. Предположим, что основной переменный магнитный поток Φ в магнитопроводе трансформатора (см. рис. 13.1, а) является синусоидальной функцией времени:

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t. \quad (13.3)$$

После подстановки выражения (13.3) в уравнения (13.1) и (13.2) и последующего дифференцирования получим:

$$e_1 = -\omega w_1 \Phi_m \cos \omega t; \quad e_2 = -\omega w_2 \Phi_m \cos \omega t.$$

Так как по известной из тригонометрии формуле $\cos \omega t = -\sin(\omega t - \pi/2)$, то

$$e_1 = \omega w_1 \Phi_m \sin(\omega t - \pi/2); \quad (13.4)$$

$$e_2 = \omega w_2 \Phi_m \sin(\omega t - \pi/2). \quad (13.5)$$

Из выражений (13.4) и (13.5) следует, что ЭДС e_1 и e_2 также являются синусоидальными величинами, но отстают по фазе от потока Φ на угол $\pi/2$.

Амплитудные значения ЭДС:

$$E_{1m} = \omega w_1 \Phi_m; \quad E_{2m} = \omega w_2 \Phi_m. \quad (13.6)$$

Действующие значения ЭДС с учетом формулы $\omega = 2\pi/f$:

$$E_1 = \frac{E_{1m}}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} w_1 f \Phi_m = 4,44 w_1 f \Phi_m; \quad (13.7)$$

$$E_2 = 4,44w_2f\Phi_m. \quad (13.8)$$

Отношение ЭДС обмотки w_1 к ЭДС обмотки w_2 называют *коэффициентом трансформации*

$$k = E_1/E_2 = w_1/w_2. \quad (13.9)$$

При практических расчетах ЭДС E_1 и E_2 с определенным допущением принимают равными номинальным напряжениям обмоток w_1 и w_2 . При этом коэффициент трансформации

$$k = E_1/E_2 \approx U_{1\text{ном}}/U_{2\text{ном}}. \quad (13.10)$$

Три режима работы трансформатора:

- *режим холостого хода* — это режим работы трансформатора без нагрузки, т.е. к зажимам его первичной обмотки подведено напряжение U_1 , а вторичная обмотка разомкнута ($I_2 = 0$);

- *режим короткого замыкания* — это такой режим, когда вторичная обмотка замкнута накоротко ($Z_{\text{н}} = 0$). При этом вторичное напряжение $U_2 = 0$. В условиях эксплуатации, когда к трансформатору подведено номинальное напряжение $U_{1\text{ном}}$, короткое замыкание является аварийным режимом. Это связано с большими токами переходных процессов в обмотках, возникающими во время коммутации, и может явиться причиной возгорания трансформатора;

- *режим нагрузки* — это режим, когда к выводам вторичной обмотки подсоединена нагрузка $Z_{\text{н}}$. При этом во вторичной обмотке протекает ток ($I_2 > 0$).

Уравнения напряжений для первичной и вторичной цепей трансформатора. В нагруженном трансформаторе (см. рис. 13.1, а) основной поток Φ — это результат наложения тех частей потоков, создаваемых токами i_1 и i_2 , которые замыкаются по магнитопроводу. Небольшая часть потоков, создаваемых токами i_1 и i_2 , замыкается вокруг витков лишь собственных обмоток. Это потоки рассеяния Φ_{σ_1} и Φ_{σ_2} .

Переменные потоки рассеяния наводят в обмотках (первичной и вторичной) ЭДС:

$$e_{\sigma_1} = -L_{\sigma_1} \frac{di_1}{dt}; \quad e_{\sigma_2} = -L_{\sigma_2} \frac{di_2}{dt}, \quad (13.11)$$

где L_{σ_1} и L_{σ_2} — индуктивности рассеяния.

Индуктивности L_{σ_1} и L_{σ_2} можно считать постоянными, так как потоки рассеяния замыкаются в основном в немагнитной среде (воздух, масло, медь), магнитная проницаемость которой постоянна.

ЭДС рассеяния можно представить в комплексной форме в действующих значениях:

$$\dot{E}_{\sigma_1} = -j\dot{I}_1 x_1; \quad \dot{E}_{\sigma_2} = -j\dot{I}_2 x_2, \quad (13.12)$$

где x_1 и x_2 — индуктивные сопротивления рассеяния первичной и вторичной обмоток соответственно.

Таким образом, в цепи первичной обмотки действует три ЭДС:

\dot{U}_1 — напряжение на выводах сетевого генератора, равное его ЭДС;

\dot{E}_1 — наведенная основным потоком Φ в первичной обмотке;

\dot{E}_{σ_1} — наведенная потоком рассеяния Φ_{σ_1} в первичной обмотке.

Для первичной цепи согласно второму закону Кирхгофа можно записать

$$\dot{U}_1 + \dot{E}_1 + \dot{E}_{\sigma_1} = \dot{I}_1 r_1. \quad (13.13)$$

где r_1 — активное сопротивление первичной обмотки.

Из уравнения (13.13) с учетом выражения (13.12) получим *уравнение напряжений для первичной цепи трансформатора*:

$$\dot{U}_1 = -\dot{E}_1 + j\dot{I}_1 x_1 + \dot{I}_1 r_1. \quad (13.14)$$

На практике падения напряжения на индуктивном сопротивлении рассеяния x_1 и активном сопротивлении первичной обмотки r_1 относительно малы и ими можно пренебречь. В этом случае

$$\dot{U}_1 \approx -\dot{E}_1 \quad \text{и} \quad U_1 \approx E_1. \quad (13.15)$$

Из выражения (13.15) с учетом (13.7) следует, что

$$U_1 \approx E_1 = 4,44 w_1 f \Phi_m.$$

Откуда амплитудное значение основного потока

$$\Phi_m \approx \frac{U_1}{4,44 w_1 f}. \quad (13.16)$$

Из выражения (13.16) следует, что значение Φ_m основного магнитного потока не зависит от нагрузки и практически неизменно, если напряжение U_1 и другие величины, входящие в формулу, неизменны.

Для вторичной обмотки, замкнутой на нагрузку Z_H , по второму закону Кирхгофа можно записать

$$\dot{E}_2 + \dot{E}_{\sigma_2} = \dot{I}_2 r_2 + \dot{I}_2 Z_H, \quad (13.17)$$

где r_2 — активное сопротивление вторичной обмотки.

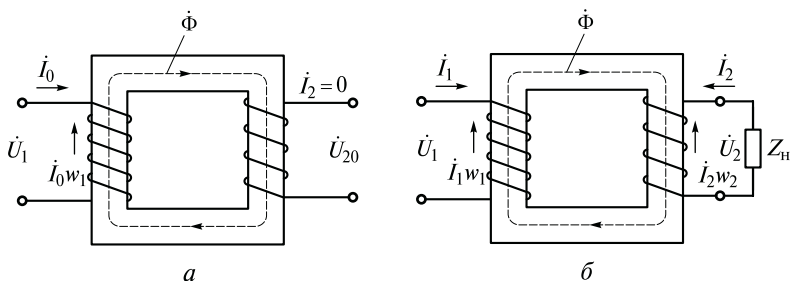


Рис. 13.2. Намагничивающие силы в цепи однофазного трансформатора в режимах холостого хода (а) и нагрузки (б)

Учитывая, что $\dot{I}_2 Z_{\text{н}} = \dot{U}_2$ (падение напряжения на нагрузке $\dot{I}_2 Z_{\text{н}}$ есть ни что иное, как напряжение на выводах вторичной обмотки), и выражение (13.12), получаем *уравнение напряжений для вторичной цепи трансформатора*:

$$\dot{U}_2 = \dot{E}_2 - j\dot{I}_2 x_2 - \dot{I}_2 r_2. \quad (13.18)$$

Если из-за малости пренебречь суммой падений напряжений на индуктивном сопротивлении рассеяния и активном сопротивлении вторичной обмотки, то $\dot{U}_2 \approx \dot{E}_2$, откуда следует $U_2 \approx E_2$. Это равенство совместно с (13.15) подтверждает правомерность выражения (13.10).

Уравнения магнитодвижущих сил и токов трансформатора. В режиме холостого хода (рис. 13.2, а) в первичной обмотке протекает ток \dot{I}_0 , который называют *током холостого хода*.

Магнитодвижущая сила $\dot{I}_0 w_1$, создаваемая током холостого хода, возбуждает в магнитопроводе трансформатора основной магнитный поток Φ . Согласно законам расчета магнитных цепей — закону Ома для участка цепи и закону полного тока (см. гл. 5 и 6), магнитный поток

$$\Phi = \dot{I}_0 w_1 / R_{\text{м}}, \quad (13.19)$$

где $R_{\text{м}}$ — магнитное сопротивление магнитопровода.

В режиме нагрузки (рис. 13.2, б) от ЭДС, наведенной переменным магнитным потоком в витках вторичной обмотки, в них возникает ток \dot{I}_2 . Поток, создаваемый током \dot{I}_2 , вливается в основной поток, замыкающийся в магнитопроводе. Пронизывая витки первичной обмотки, он наводит в них дополнительную ЭДС взаимной индукции. Это приводит к изменению тока в первичной обмотке (до значения \dot{I}_1) и потока, создаваемого током первичной

обмотки. При этом поток, создаваемый в магнитопроводе трансформатора током \dot{I}_1 первичной обмотки, компенсирует поток, создаваемый током \dot{I}_2 .

Таким образом, в режиме нагрузки основной магнитный поток создается совместным действием МДС $\dot{I}_1 w_1$ и $\dot{I}_2 w_2$. Доказано, что результирующий основной магнитный поток при этом остается неизменным, равным потоку, создаваемому в режиме холостого хода:

$$\dot{\Phi} = \frac{\dot{I}_1 w_1 + \dot{I}_2 w_2}{R_M}. \quad (13.20)$$

Исходя из положения, что $\dot{\Phi} = \text{const}$, приравняем выражения (13.19) и (13.20):

$$\dot{I}_0 w_1 / R_M = (\dot{I}_1 w_1 + \dot{I}_2 w_2) / R_M. \quad (13.21)$$

Из (13.21) получаем уравнение МДС трансформатора:

$$\dot{I}_0 w_1 = \dot{I}_1 w_1 + \dot{I}_2 w_2. \quad (13.22)$$

Из выражения (13.22) следует, что МДС первичной обмотки

$$\dot{I}_1 w_1 = \dot{I}_0 w_1 + (-\dot{I}_2 w_2).$$

Итак, МДС первичной обмотки содержит две составляющие, одна из которых ($\dot{I}_0 w_1$ — намагничивающая составляющая) наводит в магнитопроводе трансформатора магнитный поток $\dot{\Phi}$, вторая ($-\dot{I}_2 w_2$) уравнивает МДС вторичной обмотки $\dot{I}_2 w_2$.

Разделив уравнение (13.22) на w_1 , получаем ток холостого хода — намагничивающий ток

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 w_2 / w_1, \text{ или } \dot{I}_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}'_2, \quad (13.23)$$

где $\dot{I}'_2 = \dot{I}_2 w_2 / w_1$ — приведенный вторичный ток. Это ток нагрузки, равный МДС вторичной обмотки трансформатора, приходящейся на один виток первичной обмотки.

Из (13.23) получаем уравнение токов трансформатора:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_0 + (-\dot{I}'_2). \quad (13.24)$$

Соотношение токов первичной и вторичной обмоток. Сила тока холостого хода I_0 в трансформаторах большой и средней мощности составляет 2... 10 % от номинального первичного тока $I_{\text{ном}}$. Поэтому при нагрузке, близкой номинальной, можно пренебречь

значением I_0 . В этом случае из уравнения МДС (13.22) следует, что отношение действующих значений токов в обмотках трансформатора

$$I_1/I_2 = w_2/w_1. \tag{13.25}$$

Из выражения (13.25) видно, что силы токов в обмотках трансформатора обратно пропорциональны числам витков обмоток, т. е. сила тока в обмотке с меньшим числом витков (обмотка низшего напряжения НН) больше, чем в обмотке с большим числом витков (обмотка высшего напряжения ВН). Поэтому для обмотки НН используется провод большего сечения, чем для обмотки ВН.

13.3. Влияние нелинейного характера кривой намагничивания на форму кривой намагничивающего тока

При подключении первичной обмотки трансформатора к сети синусоидального напряжения намагничивающий ток i_0 создает в магнитопроводе синусоидальный поток $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$. Однако при этом форма кривой намагничивающего тока оказывается несинусоидальной. Причиной этого являются процессы, протекающие в

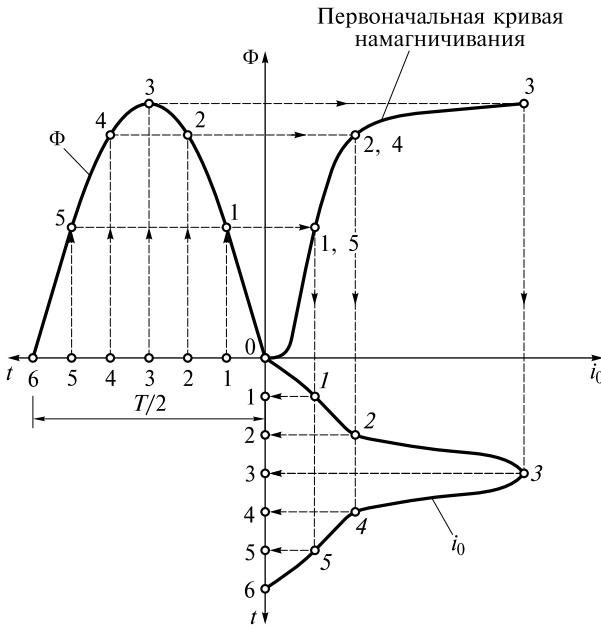


Рис. 13.3. Построение графика намагничивающего тока

материале магнитопровода при его перемагничивании (см. гл. 6), из-за которых зависимость потока от намагничивающего тока имеет нелинейный характер.

Построим кривую намагничивающего тока, учитывая нелинейный характер потока. Для этого в первой четверти прямоугольной системы координат (рис. 13.3) построим зависимость потока от намагничивающего тока i_0 . Кроме того, для простоты пренебрежем явлением гистерезиса, и будем рассматривать зависимость $\Phi = f(i_0)$ в виде первоначальной кривой намагничивания. Во второй четверти построим положительную полуволну синусоидально изменяющегося во времени потока Φ . Во второй и четвертой четвертях разобьем промежуток времени в полпериода на равные интервалы. Для точек разбиения (0...6) во второй четверти определим соответствующие значения потока Φ (точки 0...6). В первой четверти для каждого из отмеченных значений потока определим значения силы намагничивающего тока. В четвертой четверти по известным координатам (сила тока и время) определим точки (0...6), через которые и проведем кривую намагничивающего тока.

Как видно из рис. 13.3, кривая $i_0 = f(t)$ имеет несинусоидальный характер. Чем круче кривая намагничивания (более резкий переход к насыщению), тем более острую форму имеет намагничивающий ток.

13.4. Внешняя характеристика трансформатора

При работе трансформатора в режиме нагрузки изменение нагрузки (по значению или характеру) приводит к колебаниям напряжения на выходе трансформатора. Изменение вторичного напряжения трансформатора, %, при изменении его режима работы является важнейшей характеристикой трансформатора и определяется выражением:

$$\Delta U_{\text{ном}} = \frac{U_{1\text{ном}} - U_2'}{U_{1\text{ном}}} 100, \quad (13.26)$$

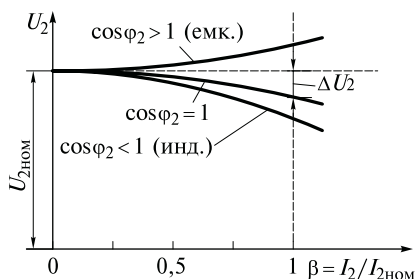
где $\Delta U_{\text{ном}}$ — относительное изменение вторичного напряжения трансформатора.

Для характеристики степени изменения нагрузки используют *коэффициент нагрузки*

$$\beta = I_2 / I_{2\text{ном}}. \quad (13.27)$$

Важнейшей характеристикой работы трансформатора является зависимость вторичного напряжения U_2 трансформатора от нагрузки I_2 , называемая *внешней характеристикой*.

Рис. 13.4. Внешние характеристики трансформатора



Внешние характеристики трансформатора (рис. 13.4) получают расчетным путем. При этом вид внешней характеристики зависит от характера нагрузки трансформатора, выражаемой величиной $\cos \varphi_2$.

Как видно из графиков (рис. 13.4), в режиме холостого хода ($\beta = 0$) вторичное напряжение $U_2 = U_{2ном}$. При увеличении нагрузки I_2 напряжение U_2 изменяется на величину $\Delta U_2 = U_2 - U_{2ном}$, причем при активном и индуктивном характере нагрузки напряжение U_2 падает ($\Delta U_2 < 0$). При емкостном характере нагрузки величина $\Delta U_2 > 0$, т.е. при увеличении нагрузки I_2 наблюдается возрастание напряжения U_2 .

13.5. Потери энергии и КПД трансформатора

В процессе преобразования электрической энергии в трансформаторе часть ее неизбежно превращается в другой вид энергии — теплоту. Эта часть составляет потери энергии. Различают потери электрические и магнитные.

Электрические потери. Это потери на нагревание материала обмоток при прохождении в нем электрического тока. Мощность электрических потерь равна сумме мощностей электрических потерь в первичной (P_{31}) и вторичной (P_{32}) обмотках:

$$P_3 = P_{31} + P_{32} = mI_1^2r_1 + mI_2^2r_2', \quad (13.28)$$

где m — число фаз трансформатора ($m = 1$ — для однофазного трансформатора; $m = 3$ — для трехфазного).

Если пренебречь из-за малости значением I_0 , то $I_1 \approx I_2'$ (см. уравнение (13.24)). При этом можно считать, что мощность электрических потерь пропорциональна квадрату тока I_1 :

$$P_3 = mI_1^2r_1 + mI_2^2r_2' = mI_1^2(r_1 + r_2'). \quad (13.29)$$

Так как сила тока первичной обмотки I_1 зависит от силы тока I_2 трансформатора (см. подразд. 13.2) и меняется при ее изменении, электрические потери называют *переменными*.

Магнитные потери от гистерезиса и вихревых токов. Основной магнитный поток Φ является переменным, и поэтому в процессе работы трансформатора его магнитопровод периодически перемагничивается. При этом затрачивается энергия на компенсацию остаточного магнетизма — компенсацию магнитного гистерезиса. Кроме того, в пластинах материала магнитопровода переменный магнитный поток Φ наводит вихревые токи, которые создают потери на нагревание материала магнитопровода. Чтобы уменьшить магнитные потери от гистерезиса магнитопровод трансформатора выполняют из магнитомягкого ферромагнитного материала — электротехнической стали. Чтобы уменьшить потери от вихревых токов, магнитопровод делают шихтованным — в виде пакетов из тонких пластин, изолированных с обеих сторон тонкой пленкой лака. Полностью скомпенсировать магнитные потери невозможно. Итак, мощность магнитных потерь P_M равна сумме мощностей потерь от гистерезиса P_{Γ} и потерь от вихревых токов $P_{в.т.}$:

$$P_M = P_{\Gamma} + P_{в.т.} \quad (13.30)$$

Установлено, что магнитные потери от гистерезиса прямо пропорциональны частоте перемагничивания магнитопровода, равной частоте сети переменного тока: $P_{\Gamma} = f$. Магнитные потери от вихревых токов прямо пропорциональны квадрату частоты: $P_{в.т.} \equiv f^2$.

Суммарные магнитные потери прямо пропорциональны квадрату магнитной индукции в магнитопроводе: $P_M = B^2$. Следовательно, при неизменном первичном напряжении ($U_1 = \text{const}$) магнитные потери *постоянны*, т. е. не зависят от нагрузки трансформатора.

Коэффициент полезного действия трансформатора. После включения трансформатора в сеть *активная мощность* P_1 , *потребляемая из сети первичной обмоткой*, частично расходуется на электрические потери в самой обмотке $P_{э1}$, частично компенсирует магнитные потери в магнитопроводе трансформатора P_M . Во вторичную обмотку передается оставшаяся мощность, называемая *электромагнитной мощностью* $P_{эм} = P_1 - P_{э1} - P_M$. При этом часть $P_{эм}$ расходуется на электрические потери во вторичной обмотке $P_{э2}$. Таким образом, *активная мощность, поступающая в нагрузку трансформатора*

$$P_2 = P_{эм} - P_{э2} = P_1 - \sum P, \quad (13.31)$$

где $\sum P = P_{э1} + P_M + P_{э2}$ — суммарные потери в трансформаторе.

Коэффициент полезного действия (КПД) трансформатора η определяется как отношение полезной мощности P_2 к затраченной мощности P_1 :

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}. \quad (13.32)$$

Контрольные вопросы

1. На каком явлении основан принцип работы трансформатора?
2. От какой сети (постоянного, переменного тока) работает трансформатор?
3. Назовите основные части трансформатора. Каково их назначение?
4. Дайте определение коэффициента трансформации трансформатора.
5. Объясните причину увеличения тока в первичной обмотке трансформатора при увеличении нагрузки.
6. Укажите виды потерь энергии в трансформаторе.
7. Почему электрические потери трансформатора называют переменными, а магнитные потери — постоянными?
8. Почему магнитопроводы трансформаторов делают из листовой стали?
9. Как определяется коэффициент полезного действия трансформатора?

Глава 14

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

14.1. Общие сведения

Классификация электрических машин. *Электрические машины* — это электромеханические устройства, предназначенные для взаимного преобразования механической и электрической энергий, действие которых основано на явлении электромагнитной индукции. Преобразование механической энергии в электрическую осуществляется электромашинными генераторами, обратное преобразование — электродвигателями. Различают электрические машины постоянного и переменного токов.

Все электрические машины по конструктивному признаку подразделяют на бесколлекторные и коллекторные.

Бесколлекторные машины — машины переменного тока. Их подразделяют на асинхронные и синхронные машины. Асинхронные машины применяют преимущественно в качестве двигателей, а синхронные как в качестве двигателей, так и в качестве генераторов. Асинхронные и синхронные машины могут быть трехфазными, включаемыми в трехфазную сеть питания, или однофазными. Асинхронные машины в зависимости от конструкции обмотки ротора разделяют на машины с короткозамкнутым ротором и с фазным ротором.

Коллекторные машины используют главным образом для работы на постоянном токе в качестве генераторов или двигателей.

Синхронные и коллекторные машины постоянного тока в зависимости от способа создания в них магнитного поля возбуждения разделяют на машины с обмоткой возбуждения и машины с постоянными магнитами.

Принцип действия электрических машин. Принцип действия электрических машин основан на явлении электромагнитной индукции и достаточно подробно освещен в соответствующих главах данного учебника. Например, в подразд. 7.2 рассмотрено устройство коллекторной машины и ее работа в режимах генератора и двигателя. Устройство генераторов переменного тока и основные сведения о получении синусоидального переменного тока представлены в гл. 8. В гл. 11 рассмотрен принцип действия асинхронных электродвигателей, основанный на принципе получения вращающегося магнитного поля с помощью трехфазного тока.

В данной главе приведены формулы расчета основных величин, характеризующих работу электрических машин, рассмотрены особенности работы и эксплуатационные свойства электрических машин на примере машин постоянного тока. Более глубокое изучение электрических машин постоянного и переменного тока предусмотрено в специальном курсе «Электрические машины постоянного и переменного тока».

14.2. Электродвижущая сила обмотки якоря

В процессе работы машины постоянного тока в каждом проводнике обмотки якоря наводится ЭДС, значение которой определяется выражением (7.6). Определим ЭДС всей обмотки якоря с учетом принятых в теории электрических машин конструктивных и электрических параметров машины.

Магнитная индукция в воздушном зазоре машины постоянного тока в пределах каждого полюсного деления τ распределяется по трапецеидальной кривой (рис. 14.1, кривая 1).

Полюсным делением τ называют часть дуги наружной поверхности якоря, приходящуюся на один полюс:

$$\tau = \pi D_a / (2p), \quad (14.1)$$

где D_a — наружный диаметр якоря, м; $2p$ — число полюсов.

Для удобства рассуждений заменим действительное распределение индукции прямоугольным (см. рис. 14.1, кривая 2) с высотой прямоугольника B , равной максимальному значению индукции B_δ и основанием b_i , которое определяется из условия равенства площадей фигур, ограниченных кривыми 1 и 2.

Согласно выражению (7.6) ЭДС одного проводника обмотки, имеющего активную длину l и окружную скорость перемещения v :

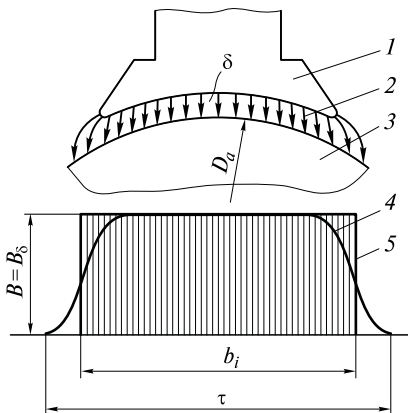


Рис. 14.1. Распределение магнитной индукции в воздушном зазоре δ электрической машины постоянного тока:

1 — магнитный полюс; 2 — воздушный зазор; 3 — якорь (наружный диаметр D_a); 4 — трапецеидальное; 5 — прямоугольное

$$E_{\text{пр}} = Blv \sin \alpha = B_{\delta} l v, \quad (14.2)$$

где $\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1$, так как окружная скорость перемещения проводника v перпендикулярна направлению индукции $B = B_{\delta}$.

Выразим окружную скорость вращения якоря v , м/с, через частоту вращения n , об/мин:

$$v = \pi D_a / T = \pi D_a f = \pi D_a n / 60,$$

где T — время одного оборота (период) якоря, с; $f = 1/T = n/60$ — циклическая частота якоря, Гц.

Тогда ЭДС проводника

$$E_{\text{пр}} = B_{\delta} l v = B_{\delta} l \pi D_a n / 60. \quad (14.3)$$

Обмотка якоря представляет собой параллельное соединение ветвей из последовательно соединенных витков провода. Пусть N — число проводников обмотки, расположенных в пазах якоря, а $2a$ — число параллельных ветвей в обмотке. Тогда ЭДС обмотки якоря E_a определяется произведением ЭДС одного проводника обмотки $E_{\text{пр}}$ на число последовательно соединенных проводников одной параллельной ветви, равное $N/(2a)$:

$$E_a = E_{\text{пр}} \frac{N}{2a} = B_{\delta} l \frac{\pi D_a n}{60} \frac{N}{2a}. \quad (14.4)$$

Так как согласно формуле (14.1) $\pi D_a = \tau 2p$, то ЭДС обмотки якоря

$$E_a = B_{\delta} l \tau \frac{2pn}{60} \frac{N}{2a} = B_{\delta} l \tau n \frac{pN}{60a}. \quad (14.5)$$

Произведение $l\tau$ представляет собой площадь S , которую пронизывает полезный магнитный поток полюса Φ , поэтому согласно выражению (5.10):

$$B_{\delta} l \tau = \Phi. \quad (14.6)$$

14.3. Магнитное поле машины постоянного тока. Реакция якоря

В машине постоянного тока статор является индуктором и создает основное магнитное поле. При работе машины в режиме нагрузки в обмотке якоря протекает ток, создающий свое магнитное поле, которое накладывается на поле индуктора и изменяет его.

Воздействие магнитного поля якоря на основное поле машины называется *реакцией якоря*. Рассмотрим по отдельности поля индуктора и якоря и результат их взаимодействия.

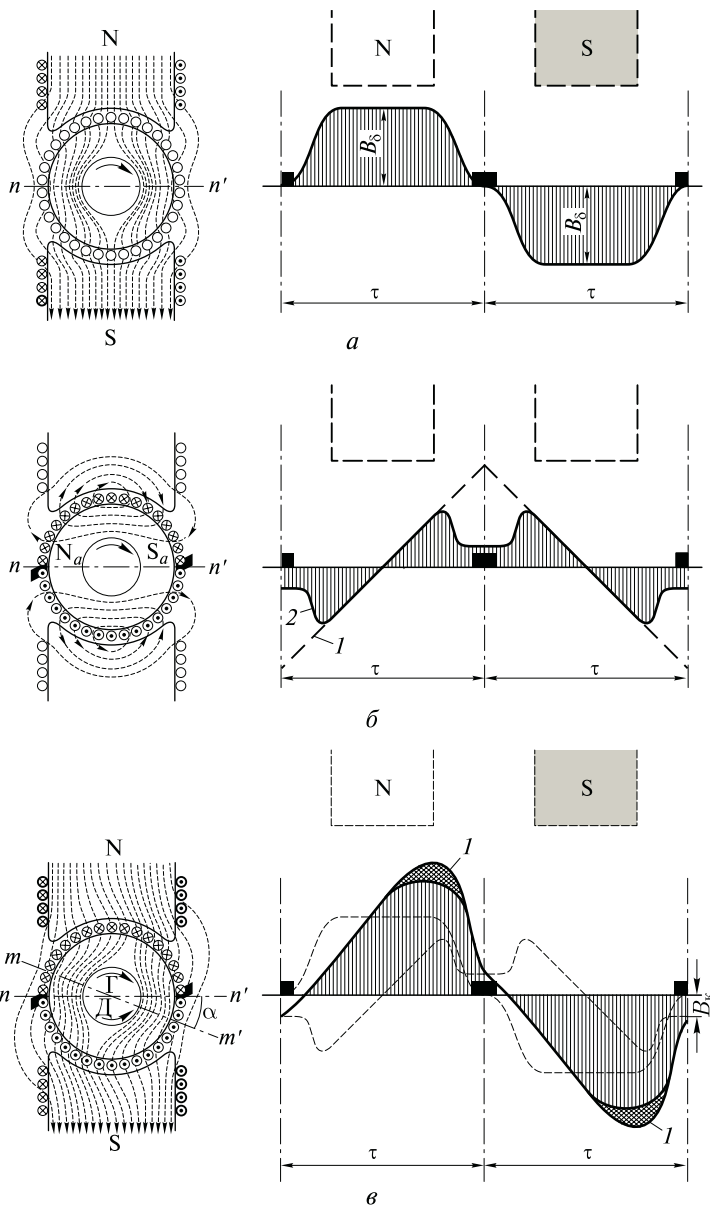


Рис. 14.2. Магнитное поле электрической машины постоянного тока:
a — магнитное поле полюсов машины в режиме холостого хода (слева) и распределение индукции в воздушном зазоре (справа); *б* — магнитное поле, созданное токами обмотки якоря (слева), и распределение индукции (справа): *1* — идеальное; *2* — реальное; *в* — результирующее магнитное поле (слева): *1* — распределение результирующей индукции (справа); *2* — результирующее поле, ослабленное насыщением

Поле индуктора. На рис. 14.2, *a* показаны распределение магнитных силовых линий поля при работе машины постоянного тока в режиме холостого хода (слева) и график магнитной индукции B_8 (справа). График имеет трапецеидальную форму. Линия nn' рисунка, проходящая через середину межполюсного пространства, называется *геометрической нейтралью*. В рассматриваемом случае геометрическая нейтраль совпадает с *физической нейтралью* — линией, проведенной через точки окружности якоря, где магнитная индукция равна нулю.

Поле якоря. В режиме нагрузки в проводниках обмотки якоря протекают токи от ЭДС, наведенных в проводниках якоря магнитным полем полюсов (картина магнитного поля полюсов не показана, рассматривается отдельно поле якоря). На рис. 14.2, *b* (слева) показано направление ЭДС (и токов), определенное по правилу правой руки, и магнитные линии поля токов проводников, направленных согласно правилу буравчика. Если щетки расположены на линии геометрической нейтрали, полюсы (N_a и S_a) поля якоря расположены так, как показано на рис. 14.2, *b* (слева), т.е. ось магнитного поля якоря направлена по поперечной оси машины. На рис. 14.2, *b* (справа) показано распределение индукции магнитного поля якоря в воздушном зазоре машины. Уменьшение индукции в точках якоря, расположенных на линии геометрической нейтрали, объясняется увеличенным воздушным участком и соответственно увеличенным магнитным сопротивлением в межполюсном пространстве.

Результирующее поле в зазоре машины. Это поле получаем, сложив поля индуктора и якоря (рис. 14.2, *в*). При этом нетрудно убедиться в том, что реакция якоря приводит к искажению магнитного поля машины. Ось результирующего поля смещается относительно оси полюсов, что соответствует смещению физической нейтрали mm' относительно геометрической нейтрали nn' на угол α в сторону вращения якоря при работе машины в генераторном режиме (Г) и против вращения якоря при работе машины в двигательном режиме (Д).

Поперечная и продольная реакции якоря и их влияние на работу машины. При расположении щеток на линии геометрической нейтрали (см. рис. 14.2, *в*) имеет место *поперечная реакция якоря* — ось потока якоря направлена поперек потока индуктора. Искажение магнитного поля машины при наличии поперечной реакции якоря приводит к размагничиванию одних и подмагничиванию других краев полюсных наконечников и участков зубцового слоя якоря. В реальных условиях магнитная цепь машины насыщена, что ограничивает увеличение магнитного потока подмагничиваемых участков магнитной цепи машины. Это вызывает ослабление результирующего магнитного потока машины (см. рис. 14.2, *в*, справа) и нарушает нормальную работу машины.

К изменению результирующего магнитного потока машины приводит и смещение щеток относительно геометрической нейтрали. При смещении щеток смещается и ось магнитного потока якоря, которая всегда направлена по оси щеток. Разложение вектора потока якоря на перпендикулярные составляющие (одна из которых, направленная поперек, — *поперечная реакция якоря*, а другая, направленная вдоль основного потока, — *продольная реакция якоря*) показывает, что продольная составляющая либо ослабляет основной поток (в режиме генератора), либо усиливает его (в режиме двигателя).

Искрение на коллекторе и «круговой огонь». Если щетки занимают положение, соответствующее геометрической нейтрали (где индукция из-за реакции якоря не равна нулю), то в активных сторонах секций в момент пересечения ими геометрической нейтрали наводится ЭДС. Это нарушает нормальную работу щеточного контакта и вызывает искрение на коллекторе.

Перераспределение магнитной индукции под полюсами, вызванное реакцией якоря (см. рис. 14.2, в), приводит к тому, что при попадании активных сторон в зону с усиленной магнитной индукцией, в них наводится ЭДС повышенной величины. Поэтому между отдельными коллекторными пластинами могут появиться напряжения, значительно превышающие допустимые значения, в результате чего возникает искрение, называемое *потенциальным искрением*. Искрение может привести к ионизации пространства между пластинами и возникновению электрической дуги на коллекторе. Дуга может переброситься на щетки и корпус машины. Это явление, называемое «круговой огонь», чрезвычайно опасно.

Для ослабления реакции якоря в машинах постоянного тока применяют специальную *компенсационную обмотку*. Ее располагают в предусмотренных для нее пазах полюсных наконечников и соединяют последовательно с обмоткой якоря так, чтобы намагничивающая сила обмотки была направлена противоположно намагничивающей силе обмотки якоря. Последовательное включение ее с обмоткой якоря обеспечивает компенсацию реакции якоря при различных нагрузках машины.

14.4. Коммутация в машинах постоянного тока

При вращении якоря коллекторные пластины поочередно вступают в контакт со щетками. При этом переход щетки с одной коллекторной пластины на другую сопровождается переключением какой-либо секции обмотки якоря из одной параллельной ветви в другую и изменением направления тока в этой секции.

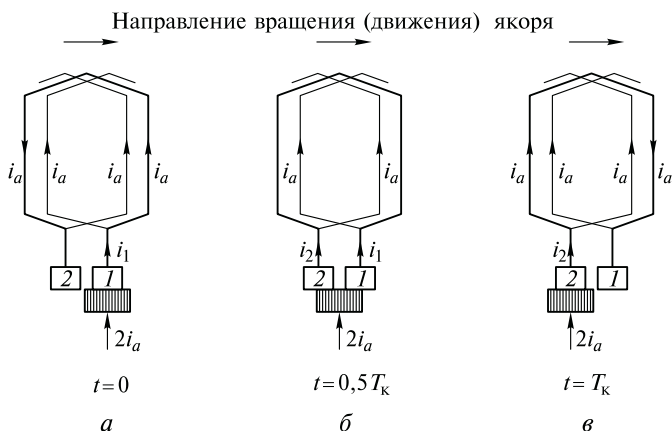


Рис. 14.3. Переход коммутирующей секции из одной параллельной ветви в другую:

1, 2 — пластины

Совокупность явлений, связанных с изменением тока в секциях обмотки якоря при переключении этих секций из одной параллельной ветви в другую, называется *коммутацией*.

Секция, в которой происходит коммутация, называется *коммутирующей*, а время, в течение которого происходит процесс коммутации, называется *периодом коммутации* T_k . Период коммутации определяется отрезком времени от момента, когда коллекторная пластина вступает в соприкосновение со щеткой, до момента, когда пластина полностью выходит из соприкосновения с ней.

Процесс перехода коммутирующей секции из одной параллельной ветви в другую. Процесс представлен на рис. 14.3. В начальный момент коммутации (рис. 14.3, а) контактная поверхность щетки касается только пластины 1, а коммутирующая секция относится к левой параллельной ветви, и в ней протекает ток i_a . Затем пластина 1 постепенно сбегает со щетки, и на смену ей набегает пластина 2. При этом коммутирующая секция оказывается замкнутой накоротко, и ток в ней постепенно уменьшается до нуля (рис. 14.3, б). В конце процесса контактная поверхность щетки касается только пластины 2, и в коммутирующей секции протекает противоположно направленный ток, равный i_a .

Таким образом, за период коммутации ток в коммутируемой секции изменяется от $+i_a$ до $-i_a$. Так как изменение тока происходит быстро (период коммутации измеряется микросекундами) и паз окружен ферромагнитным материалом, усиливающим магнитный поток, образованный током i_a , то в коммутирующей секции, обладающей индуктивностью L_c , наводится ЭДС самоиндукции

$$e_L = -L_c \frac{di_a}{dt}. \quad (14.8)$$

Так как ширина щетки больше ширины коллекторной пластины, в машине одновременно коммутируют несколько взаимно индуктивно-связанных секций. В связи с этим в коммутирующих секциях наводится еще и ЭДС взаимной индукции

$$e_M = -M \frac{di_a}{dt}. \quad (14.9)$$

Сумма этих ЭДС составляет реактивную ЭДС

$$e_p = e_L + e_M. \quad (14.10)$$

Кроме того, магнитное поле машины, искаженное реакцией якоря, создает в зоне коммутации магнитную индукцию B_k (см. рис. 14.2, *в*), которая наводит в коммутирующей секции ЭДС вращения, определяемую согласно формуле (7.6):

$$e_{вр} = B_k 2lvw_c, \quad (14.11)$$

где l — длина активной стороны секции; v — скорость движения секции; w_c — число витков в секции.

Полная ЭДС коммутирующей секции

$$e_k = e_p + e_{вр}. \quad (14.12)$$

Когда секция замкнута щеткой накоротко (рис. 14.3, *б*), под действием ЭДС e_k в секции возникает ток коммутации i_k (на рисунке не показан). В момент окончания периода коммутации, когда щетка теряет контакт с одной из пластин коллектора, размыкается цепь тока i_k коммутирующей секции. При этом возникает переходный процесс, во время которого энергия, накопленная за период коммутации, затрачивается на поддержание тока i_k в коммутирующей секции. Между расходящимися краями пластины коллектора и щетки возникает искра. Так как процесс повторяется с каждой пластиной, пока машина работает, то возникает непрекращающееся искрение на щетках. Такое искрение называют коммутационным искрением. Искрение ведет к подгоранию щеток, что вызывает дальнейшее усиление искрения. Кроме того, искрение вызывает излучение электромагнитных волн, создающих помехи радиоприему, что необходимо учитывать при работе машин постоянного тока вблизи радиоустройств.

Способы улучшения коммутации сводятся к уменьшению или полному устранению тока коммутации. Наиболее эффективным методом является создание в зоне коммутации магнитного потока, наводящего ЭДС такой величины и направления, чтобы ком-

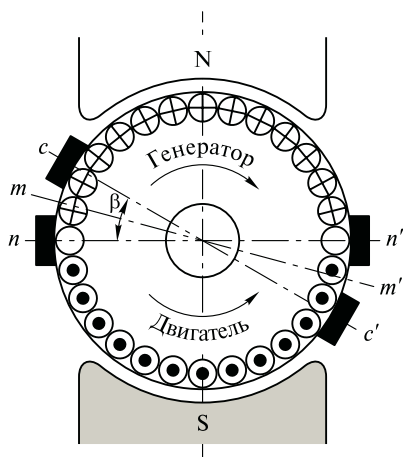


Рис. 14.4. Смещение щеток за линию физической нейтрали

пенсировать ЭДС e_k . Это достигается двумя способами: установкой добавочных полюсов и смещением щеток за линию, являющуюся физической нейтралью.

Добавочные полюсы устанавливаются между главными полюсами. Намагничивающая сила этих полюсов направлена против намагничивающей силы якоря и создает магнитный поток, который компенсирует поток якоря в зоне коммутации. При этом $e_k = e_p + e_{вр} = 0$.

Смещение щеток за линию физической нейтрали — простой и надежный способ улучшения коммутации (рис. 14.4). Смещая щетки с линии геометрической нейтрали nn' по направлению вращения якоря в генераторах или против вращения якоря в двигателях, в зоне коммутации получают магнитное поле, необходимое для создания ЭДС вращения $e_{вр}$, компенсирующей реактивную ЭДС. Чтобы $e_{вр}$ была достаточна для компенсации e_p , щетки смещают за линию физической нейтрали mm' на угол $\beta > \alpha$.

14.5. Способы возбуждения машин постоянного тока

Способ создания магнитного поля в электрических машинах называется *способом возбуждения*. Магнитное поле машины постоянного тока в большинстве случаев создается катушкой возбуждения, которая питается постоянным током. Такой способ возбуждения называется *электромагнитным*. Создание магнитного поля с помощью постоянных магнитов определяет *магнитный* способ возбуждения.

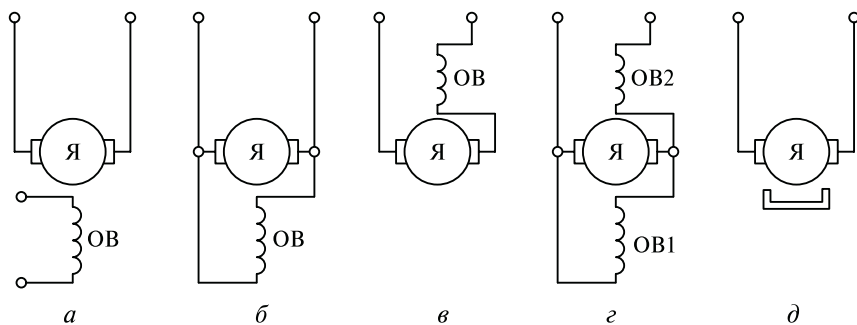


Рис. 14.5. Способы возбуждения машин постоянного тока:

а — независимое возбуждение; *б* — параллельное возбуждение; *в* — последовательное возбуждение; *г* — смешанное возбуждение; *д* — возбуждение постоянными магнитами

Свойства машины в значительной степени зависят от схемы включения обмотки возбуждения (ОВ) относительно обмотки якоря (рис. 14.5).

Различают:

- машины независимого возбуждения. В них обмотка возбуждения питается постоянным током от источника, электрически не связанного с обмоткой якоря (рис. 14.5, *а*);
- машины параллельного возбуждения. В них обмотка возбуждения (*шунтовая*) и обмотка якоря соединены параллельно (рис. 14.5, *б*);
- машины последовательного возбуждения. В них обмотка возбуждения (*серийная*) и обмотка якоря соединены последовательно (рис. 14.5, *в*). Они обычно применяются в качестве двигателей;
- машины смешанного возбуждения. Они имеют две обмотки возбуждения — параллельную ОВ1 и последовательную ОВ2 (рис. 14.5, *г*);
- машины с возбуждением постоянными магнитами (рис. 14.5, *д*).

14.6. Коллекторные генераторы постоянного тока

Электромагнитный момент генератора. При работе генератора в режиме нагрузки двигатель создает на якоре генератора электромагнитный момент, обусловленный электромагнитными силами, возникающими при взаимодействии магнитного поля индуктора с токами, протекающими в пазовых проводниках обмотки якоря.

Электромагнитная сила, действующая на каждый пазовый проводник с током согласно формуле (5.30) с учетом обозначений, принятых в теории электрических машин,

$$F_{\text{эм.пр}} = B_{\delta} l i_a = B_{\delta} l I_a / (2a), \quad (14.13)$$

где l — активная длина пазового проводника; $i_a = I_a / (2a)$ — ток в пазовом проводнике; I_a — общий ток обмотки якоря; $2a$ — число пар параллельных ветвей.

Электромагнитный момент обмотки, имеющий N пазовых проводников, с учетом формул (7.15), (14.13) и (14.1):

$$M = 2F_{\text{эм.пр}} \frac{D_a}{2} \frac{N}{2} = B_{\delta} l \frac{I_a}{2a} D_a \frac{N}{2} = B_{\delta} l \frac{I_a}{2a} \frac{\tau 2p}{\pi} \frac{N}{2}.$$

Согласно выражению (14.6) $B_{\delta} l \tau = \Phi$, поэтому

$$M = \frac{pN}{2\pi a} \Phi I_a = c_m \Phi I_a, \quad (14.14)$$

где $c_m = pN / (2\pi a)$ — величина, постоянная для данной машины, аналогичная величине c_e (см. формулу (14.7)).

Напряжение и мощность генератора. При вращении обмотки якоря в магнитном поле машины в ней наводится ЭДС, определяемая уравнением (14.7). Если к щеткам машины подключена нагрузка, то в цепи якоря (в том числе и в нагрузке) появится ток I_a , а на выводах генератора установится напряжение, соответствующее уравнению (2.36),

$$U = E_a - I_a \sum r,$$

где $\sum r = r_a + r_d + r_{\text{к.о}} + r_c + r_{\text{щ}}$ — эквивалентное сопротивление всех участков цепи якоря (r_a — обмотка якоря; r_d — обмотка добавочных полюсов; $r_{\text{к.о}}$ — компенсационная обмотка; r_c — последовательная обмотка возбуждения; $r_{\text{щ}}$ — обмотка переходного щеточного контакта).

Якорь генератора приводится во вращение приводным двигателем, создающим на валу генератора вращающий момент M_1 . В режиме холостого хода, когда нагрузка разомкнута и $I_a = 0$, двигатель развивает небольшой момент холостого хода M_0 . В режиме нагрузки двигатель создает на якоре электромагнитный момент согласно (14.14):

$$M = c_m \Phi I_a.$$

При неизменной частоте вращения якоря ($n = \text{const}$) можно записать *уравнение моментов для генератора*:

$$M_1 = M_0 + M. \quad (14.15)$$

Умножив члены уравнения (14.15) на угловую скорость вращения якоря ω , получим уравнение мощностей:

$$P_1 = P_0 + P_{эм}, \quad (14.16)$$

где $P_1 = M_1\omega$ — механическая мощность, подводимая к генератору от приводного двигателя; $P_0 = M_0\omega$ — мощность, потребляемая генератором в режиме холостого хода; $P_{эм} = M\omega$ — электромагнитная мощность генератора.

Электромагнитная мощность якоря с учетом уравнения (14.13)

$$P_{эм} = E_a I_a = U I_a + I_a^2 \sum r = P_2 + P_{э.а}, \quad (14.17)$$

где $P_2 = U I_a$ — полезная электрическая мощность, отдаваемая генератором нагрузке; $P_{э.а} = I_a^2 \sum r$ — мощность электрических потерь в цепи якоря.

Если потери в обмотке возбуждения $P_{э.в}$ учитывать отдельно, то

$$P_1 = P_2 + P_0 + P_{э.а} + P_{э.в}. \quad (14.18)$$

Основные характеристики генераторов. Характеристики рассматривают при условии $n = \text{const}$, так как генераторы обычно работают при неизменной частоте вращения.

Характеристика холостого хода — зависимость напряжения на выходе генератора в режиме холостого хода ($I = 0$) от тока возбуждения:

$$U_0 = f(I_B) \text{ при } I = 0 \text{ и } n = \text{const}.$$

Нагрузочная характеристика — зависимость напряжения на выходе генератора при работе в режиме нагрузки от тока возбуждения:

$$U = f(I_B) \text{ при } I \neq 0 \text{ и } n = \text{const}.$$

Внешняя характеристика — зависимость напряжения на выходе генератора U от тока нагрузки I :

$$U = f(I) \text{ при } r_{гр} = \text{const} \text{ и } n = \text{const},$$

где $r_{гр}$ — регулировочное сопротивление в цепи обмотки возбуждения.

Регулировочная характеристика — зависимость тока возбуждения I_B от тока нагрузки I при неизменном напряжении на выходе генератора:

$$I_B = f(I) \text{ при } U = \text{const} \text{ и } n = \text{const}.$$

Характеристики генератора независимого возбуждения. На рис. 14.6, а представлена принципиальная схема включения генератора независимого возбуждения. Обмотка возбуждения питается от источника постоянного тока, а реостат $r_{гр}$ позволяет регулировать

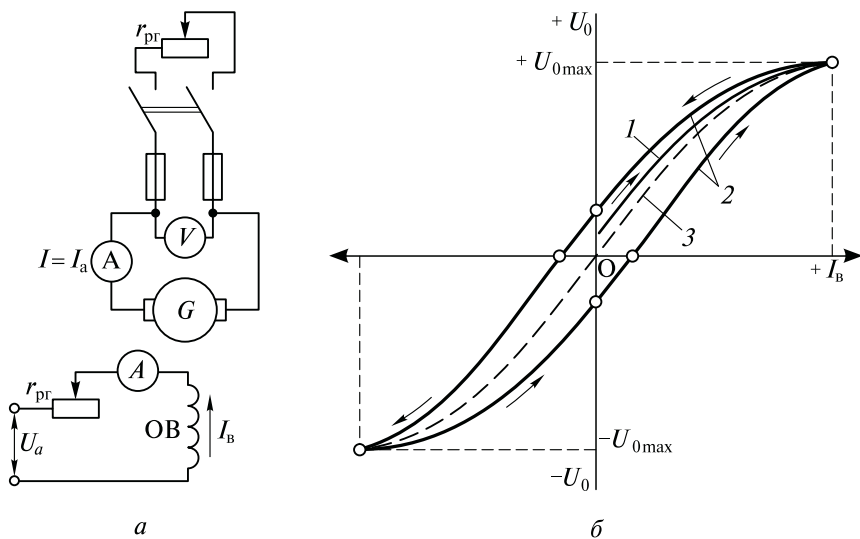


Рис. 14.6. Принципиальная схема генератора независимого возбуждения (а) и его характеристика холостого хода (б):
 1 — первоначальная кривая намагничивания; 2 — петля гистерезиса; 3 — расчетная характеристика холостого хода

ток возбуждения I_B и таким образом изменять магнитное поле машины.

Характеристика холостого хода (рис. 14.6, б, график 2) повторяет в соответствующем масштабе *магнитную характеристику машины*, которая представляет собой петлю гистерезиса (см. гл. 6), характеризующую магнитные свойства машины. По характеристике холостого хода можно судить о степени магнитного насыщения машины. Начальная ордината графика 1 не равна нулю, что объясняется действием небольшого остаточного магнетизма, сохранившегося от предыдущего включения машины. Проведя кривую между *восходящей и нисходящей ветвями характеристики холостого хода* (график 2), получаем *расчетную характеристику холостого хода* (график 3).

Нагрузочная характеристика генератора $U=f(I_B)$ повторяет по виду характеристику холостого хода, но проходит несколько ниже из-за размагничивающего действия реакции якоря.

Внешняя характеристика генератора. При снятии данных для построения внешней характеристики (рис. 14.7, а) якорь генератора приводят во вращение с номинальной скоростью и нагружают его до номинального тока при номинальном напряжении, а затем снимают показания, уменьшая нагрузку до холостого хода и поддерживая постоянными сопротивление r_{pr} и скорость вращения n .

Из графика видно, что при увеличении тока нагрузки I напряжение U на выводах генератора понижается. Это объясняется и размагничивающим действием реакции якоря, и падением напряжения в цепи якоря $U = E_a - I_a \sum r$. Степень изменения выходного напряжения характеризуется наклоном внешней характеристики к оси абсцисс — *жесткостью* и является очень важной характеристикой генератора. Чем более жесткая характеристика, тем меньше ее наклон. Жесткость внешней характеристики оценивается *номинальным изменением напряжения генератора при сбросе нагрузки*.

$$\Delta U_{\text{НОМ}} = \frac{U_0 - U_{\text{НОМ}}}{U_{\text{НОМ}}} 100. \quad (14.19)$$

Регулировочная характеристика генератора $I_B = f(I)$ представлена на рис. 14.7, б. Характеристика показывает, как необходимо изменять ток возбуждения, чтобы при изменении тока нагрузки напряжение на выходе оставалось постоянным. При этом I_{B0} — ток возбуждения генератора в режиме холостого хода, при котором напряжение на выводах генератора становится равным номинальному. Из графика видно, что нисходящая ветвь характеристики (кривая 2) расположена ниже восходящей (кривая 1). Это объясняется уменьшением остаточного магнетизма при снятии кривой 2. Средняя линия 3 называется *практической регулировочной характеристикой генератора*.

Возможность регулирования напряжения в широких пределах, а также сравнительно жесткая внешняя характеристика рассматриваемого генератора являются его достоинствами. Недостаток генераторов независимого возбуждения — необходимость в постороннем источнике постоянного тока — возбудителе.

Характеристики генераторов параллельного и смешанного возбуждения. Работа этих генераторов основана на *принципе самовоз-*

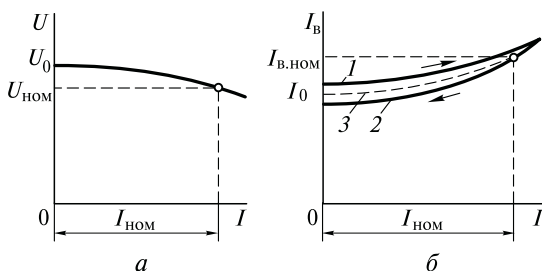


Рис. 14.7. Внешняя характеристика генератора независимого возбуждения (а) и его регулировочная характеристика (б):

1 — восходящая ветвь; 2 — нисходящая ветвь; 3 — практическая регулировочная характеристика

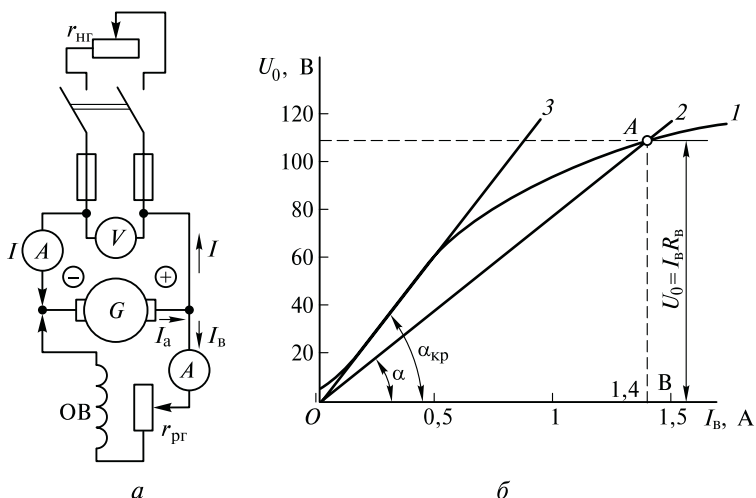


Рис. 14.8. Принципиальная схема (а) генератора параллельного возбуждения и характеристика холостого хода (б):

1 — холостого хода; 2 — прямая $U_0 = I_b R_b$; 3 — касательная к графику 1

буждения. Принцип самовозбуждения заключается в том, что магнитная система машины, будучи однажды намагниченной, длительное время сохраняет небольшой магнитный поток остаточного магнетизма $\Phi_{ост}$. В генераторе параллельного возбуждения, схема включения которого показана на рис. 14.8, а, при вращении якоря в магнитном поле $\Phi_{ост}$ в обмотке якоря наводится ЭДС $E_{ост}$, под действием которой в обмотке возбуждения возникает небольшой ток $I_{в,ост}$, который создает свой собственный небольшой поток $\Phi_{в}$. Если $\Phi_{в}$ направлен согласно с $\Phi_{ост}$, то суммарный поток главных полюсов увеличивает наведенную в якоре ЭДС. Процесс нарастания ЭДС E_a продолжается, пока не достигнет значения $U_0 = I_b R_b$, где общее сопротивление обмотки возбуждения $R_b = r_b + r_{пр}$ (r_b — сопротивление обмотки возбуждения).

Характеристика холостого хода генератора параллельного возбуждения показана на рис. 14.8, б (кривая 1). Точка пересечения А прямой 2 соответствует окончанию процесса самовозбуждения, так как именно в ней $I_b R_b = U_0$.

Угол α наклона прямой 2 к оси абсцисс определяется из треугольника OAB и связан с сопротивлением R_b соотношением:

$$\alpha = \arctg \left(\frac{U_0}{I_b} \frac{m_I}{m_U} \right) = \arctg \left(R_b \frac{m_I}{m_U} \right), \quad (14.20)$$

где m_U — масштаб напряжения, В/мм; m_I — масштаб тока, А/мм.

Как видно из рис. 14.8, б, при некотором значении угла $\alpha = \alpha_{кр}$ (критический угол) прямая 3 не пересекает график 1, а касается его снаружи. При $\alpha \geq \alpha_{кр}$ самовозбуждение невозможно. Сопротивление цепи возбуждения, соответствующее значению угла $\alpha_{кр}$, называют *критическим* $r_{в,кр}$.

Характеристика самовозбуждения генератора — зависимость напряжения холостого хода от частоты вращения, т. е. $U_0 = f(n)$ при $r_v = \text{const}$ (рис. 14.9, а).

Самовозбуждение генератора возможно лишь при частоте вращения $n > n_{кр}$. При этом $n_{кр}$ зависит от сопротивления r_v и с ростом его увеличивается.

Нагрузочная и регулировочная характеристики практически не отличаются от соответствующих характеристик генератора независимого возбуждения.

Внешняя характеристика генератора параллельного возбуждения (рис. 14.9, б, кривая 1) имеет меньшую жесткость, чем у генератора независимого возбуждения (из-за реакции якоря, падения напряжения в цепи якоря и уменьшения тока возбуждения от действия первых двух причин). Эти же факторы являются причиной увеличения тока I только до критического значения $I_{кр}$, после чего при дальнейшем уменьшении сопротивления нагрузки он уменьшается до тока короткого замыкания $I_{кз} < I_{кр}$. Но при внезапном коротком замыкании магнитная система генератора не успевает размагнититься, и ток $I_{кз}$ достигает опасных для машины значений, превышающих номинальный ток в 8... 12 раз (кривая 2). При этом на валу генератора возникает значительный тормозящий момент, вызывающий сильный искрение коллектора, переходящее в круговой огонь. Для защиты от этих явлений цепь якоря защищают плавкими предохранителями или автоматическими выключателями.

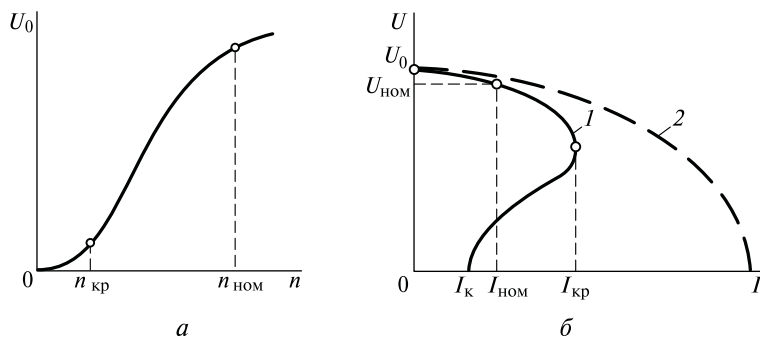


Рис. 14.9. Характеристика самовозбуждения (а) и внешняя характеристика (б) генератора параллельного возбуждения:

1 — в рабочем режиме; 2 — при внезапном коротком замыкании

Область применения генераторов постоянного тока. Генераторы постоянного тока применяют в гальванотехнике для питания электролитических ванн, для зарядки аккумуляторов, в качестве датчиков скорости вращения, в автомобильном, судовом и самолетном электрооборудовании, в установках проводной и радиосвязи и т. д.

14.7. Коллекторные двигатели постоянного тока

Основные понятия. Коллекторные машины обладают свойством обратимости, т. е. они могут работать и в режиме генератора, и в режиме двигателя. Если выводы машины подключить к источнику постоянного тока, то в обмотках возбуждения и якоря появятся токи. Ток в обмотке возбуждения создаст магнитный поток. Сила, возникающая от взаимодействия тока якоря с магнитным потоком обмотки возбуждения, создает на якоре *вращающий* электромагнитный момент:

$$M = c_m \Phi I_a.$$

В процессе работы во вращающемся якоре будет наводиться ЭДС E_a , направление которой определяется по правилу правой руки. Легко с помощью правил левой и правой руки убедиться в том, что в данном случае ЭДС E_a направлена против тока I_a , т. е. является противоЭДС. Двигатель работает в режиме потребителя, и напряжение на его выводах при постоянной частоте вращения

$$U = E_a + I_a \sum r. \quad (14.21)$$

Из формулы (14.21) следует, что ток якоря

$$I_a = (U - E_a) / \sum r. \quad (14.22)$$

Умножив (14.21) на ток якоря I_a , получим *уравнение (баланс) мощности для цепи якоря*:

$$UI_a = E_a I_a + I_a \sum r, \quad (14.23)$$

где $UI_a = P_1$ — электрическая мощность, подводимая к двигателю (затраченная в двигателе); $I_a^2 \sum r$ — мощность электрических потерь в цепи; $E_a I_a = P_2$ — полезная электромагнитная мощность, расходуемая на создание вращающего момента. В этом легко убедиться, преобразовав выражение $E_a I_a$ и выразив число оборотов в минуту n из формулы угловой скорости вращения $\omega = 2\pi n/60$:

$$E_a I_a = \frac{pN}{60a} \Phi n I_a = \frac{pN}{60a} \Phi \frac{60\omega}{2\pi} I_a = c_m \Phi I_a \omega = M \omega. \quad (14.24)$$

Из формул (14.23) и (14.24) следует, что при увеличении нагрузки на вал двигателя из сети потребляется больший ток.

Из формул (14.7) и (14.21) можно определить число оборотов

$$n = \frac{U - I_a \sum r}{c_e \Phi}. \quad (14.25)$$

Согласно правилу левой руки направление вращения якоря определяется направлениями магнитного потока возбуждения и тока в обмотке якоря. Изменив одно (любое) из направлений, можно изменить направление вращения якоря.

Характеристики двигателей постоянного тока. В качестве двигателей используют коллекторные машины независимого и параллельного возбуждения. Их принципиальные схемы включения представлены на рис. 14.10.

Эксплуатационные свойства двигателей постоянного тока одинаковы при независимом и параллельном возбуждении и определяются *рабочими и механическими характеристиками*.

Рабочие характеристики (рис. 14.11, а):

- *характеристика $n = f(P_2)$* — зависимость числа оборотов n (об/мин) от полезной мощности двигателя P_2 при напряжении питания $U = \text{const}$ и тока в обмотке возбуждения $I_B = \text{const}$. Она имеет вид кривой с наклоном к оси абсцисс;

- *характеристика момента $M_2 = f(P_2)$* — зависимость полезного момента M_2 (на валу двигателя, Н·м) от полезной мощности P_2 при $U = \text{const}$ и $I_B = \text{const}$. Согласно формуле (14.24):

$$M_2 = P_2 / \omega = 9,55 / n. \quad (14.26)$$

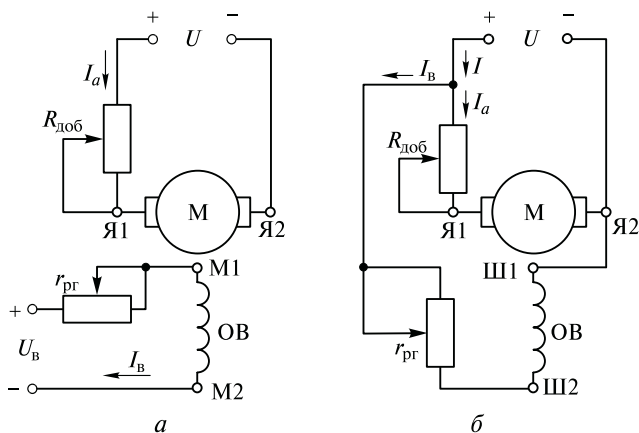


Рис. 14.10. Принципиальные схемы включения двигателей постоянного тока независимого (а) и параллельного (б) возбуждения

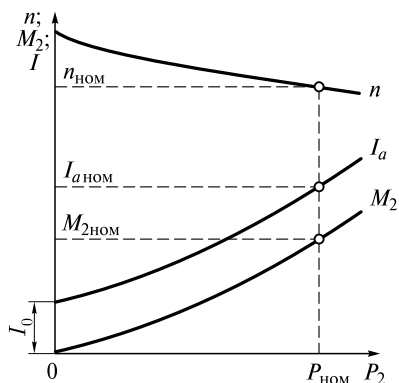


Рис. 14.11. Рабочие характеристики двигателей постоянного тока независимого и параллельного возбуждения

Характеристика тока якоря $I_a = f(P_2)$ не выходит из начала координат, так как в режиме холостого хода из сети потребляется ток холостого хода и развивает момент холостого хода, компенсирующий механические и магнитные потери в двигателе.

Механические характеристики — зависимость частоты вращения якоря n от электромагнитного момента M при $U = \text{const}$ и $r_{\text{гр}} = \text{const}$.

Регулирование частоты вращения двигателей чаще всего осуществляется или с помощью включения в цепь якоря резистора с сопротивлением $R_{\text{доб}}$, или изменением магнитного потока возбуждения с помощью реостата $r_{\text{гр}}$ (см. рис. 14.10).

Область применения двигателей постоянного тока. Двигатели постоянного тока широко применяют в регулируемых электроприводах металлорежущих станков, прокатных станов и шахтных подъемников, как исполнительные элементы в автоматических устройствах, в качестве тяговых двигателей на электрифицированном транспорте. Они позволяют плавно и в широких пределах регулировать скорости вращения, создают большие вращающие моменты при пуске.

Контрольные вопросы

1. Каково устройство и назначение электрических машин? На чем основан принцип их действия?
2. Что такое реакция якоря и каково ее воздействие на основное магнитное поле электрической машины?
3. Каково назначение компенсационной обмотки?
4. Перечислите способы возбуждения электрических машин.
5. Каковы основные характеристики генераторов постоянного тока?
6. В чем сущность принципа самовозбуждения генераторов параллельного возбуждения?
7. В чем заключается свойство обратимости коллекторных машин?
8. Как изменить направление вращения ротора машины?
9. Какие характеристики определяют эксплуатационные свойства двигателей постоянного тока?
10. Какова область применения двигателей постоянного тока?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кацман М. М.* Электрические машины приборных устройств и средств автоматизации : учеб. пособие / М. М. Кацман. — М. : Изд. центр «Академия», 2005.
2. *Лоторейчук Е. А.* Электротехника. Теоретические основы : учеб. пособие / Е. А. Лоторейчук. — М. : Высш. шк., 2005.
3. *Полещук В. И.* Задачник по электротехнике и электронике : учеб. пособие / В. И. Полещук. — М. : Изд. центр «Академия», 2014.
4. *Фуфаева Л. И.* Применение ЭВМ при изучении теоретических основ электротехники : учеб. пособие / Л. И. Фуфаева. — М. : Энергоатомиздат, 1992.
5. ГОСТ Р 52002—2003. Электротехника. Термины и определения основных понятий. — М. : Госстандарт России, 2003.
6. ГОСТ 2.710—81 (СТ СЭВ: 2182—80, 6306—88). Единая система конструкторской документации. Обозначения условные буквенно-цифровые в электрических схемах. — М. : Государственный комитет стандартов Совета Министров СССР (взамен ГОСТ 2.710—75).
7. ГОСТ 1494—77 (СТ СЭВ 3231—81). Электротехника. Буквенные обозначения основных величин. — М. : Государственный комитет стандартов Совета Министров СССР, 1977.
8. Единая система конструкторской документации. Обозначения условные графические в схемах. — М. : Изд-во стандартов, 1983.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Электрическое поле	5
1.1. Электричество и электрический заряд	5
1.2. Основные характеристики электрического поля	12
1.3. Расчет электростатических полей	17
1.4. Вещество в электрическом поле	26
1.5. Электрическая емкость проводников. Конденсатор	34
1.6. Энергия электрического поля	42
Глава 2. Основные понятия электрических цепей. Закон Ома	45
2.1. Электрический ток и его плотность	45
2.2. Источники электрической энергии	48
2.3. Закон Ома для участка цепи. Электрическое сопротивление и проводимость	51
2.4. Электрическая цепь и ее основные элементы Схема электрической цепи	58
2.5. Электродвижущая сила	63
2.6. Схема замещения электрической цепи	65
2.7. Энергия и мощность электрической цепи. Баланс мощностей	66
2.8. Преобразование электрической энергии в тепловую энергию	70
2.9. Закон Ома для полной электрической цепи	72
2.10. Источники ЭДС и тока	76
2.11. Режимы работы электрической цепи	79
2.12. Расчет потенциалов точек электрической цепи	84
Глава 3. Расчет разветвленных электрических цепей постоянного тока	91
3.1. Законы Кирхгофа	91
3.2. Способы соединения резисторов	94
3.3. Метод «свертки» для расчета разветвленных цепей с одним источником энергии	102
3.4. Методы расчета сложных электрических цепей	106
3.5. Способы соединения конденсаторов. Расчет электростатических цепей	117
Глава 4. Нелинейные цепи постоянного тока	124
4.1. Основные понятия нелинейных цепей	124
4.2. Расчет нелинейных электрических цепей постоянного тока	127
Глава 5. Магнитное поле	138
5.1. Основные характеристики магнитного поля	138
5.2. Расчет магнитных полей с помощью закона полного тока	150
5.3. Магнитные свойства вещества	157

5.4. Работа электромагнитных сил	162
5.5. Индуктивность. Взаимная индуктивность	168
5.6. Энергия магнитного поля	176
Глава 6. Магнитная цепь	179
6.1. Свойства и применение ферромагнитных материалов	179
6.2. Расчет магнитных цепей	186
Глава 7. Электромагнитная индукция	194
7.1. Электродвижущая сила электромагнитной индукции	194
7.2. Взаимное преобразование механической и электрической энергий в генераторах и двигателях	205
Глава 8. Переменный синусоидальный ток	209
8.1. Основные сведения о синусоидальном электрическом токе	209
8.2. Векторные диаграммы	219
8.3. Среднее и действующее значения синусоидальной величины	227
Глава 9. Расчет линейных электрических цепей синусоидального тока	233
9.1. Цепь с активным сопротивлением	233
9.2. Цепь с индуктивностью	237
9.3. Цепь с емкостью	242
9.4. Цепь с реальной катушкой индуктивности	247
9.5. Цепь с реальным конденсатором	255
9.6. Последовательное соединение катушки индуктивности и конденсатора	262
9.7. Параллельное соединение катушки индуктивности и конденсатора	269
9.8. Метод проводимостей для расчета цепей с параллельным соединением ветвей	272
9.9. Резонанс в электрических цепях	278
9.10. Экономическое значение коэффициента мощности и методы его повышения	286
Глава 10. Комплексный метод расчета цепей синусоидального тока	289
10.1. Комплексные числа	289
10.2. Выражение характеристик электрических цепей комплексными числами	295
Глава 11. Трехфазные цепи	306
11.1. Трехфазная система ЭДС	306
11.2. Расчет трехфазной цепи при соединении источника и приемника звездой	313
11.3. Расчет трехфазной цепи при соединении источника и приемника треугольником	320
11.4. Вращающееся магнитное поле, создаваемое трехфазным током	323

Глава 12. Переходные процессы в электрических цепях	328
12.1. Законы коммутации	328
12.2. Включение RL -цепи на постоянное напряжение	332
12.3. Отключение RL -цепи от источника постоянного напряжения	335
12.4. Переходные процессы в цепи с конденсатором при постоянном напряжении на ее зажимах	339
12.5. Переходные процессы в электрических цепях синусоидального тока	343
Глава 13. Трансформаторы	349
13.1. Общие сведения	349
13.2. Теоретические основы расчета трансформатора	352
13.3. Влияние нелинейного характера кривой намагничивания на форму кривой намагничивающего тока	357
13.4. Внешняя характеристика трансформатора	358
13.5. Потери энергии и КПД трансформатора	359
Глава 14. Электрические машины	362
14.1. Общие сведения	362
14.2. Электродвижущая сила обмотки якоря	363
14.3. Магнитное поле машины постоянного тока. Реакция якоря	364
14.4. Коммутация в машинах постоянного тока	367
14.5. Способы возбуждения машин постоянного тока	370
14.6. Коллекторные генераторы постоянного тока	371
14.7. Коллекторные двигатели постоянного тока	378
Список литературы	381

Учебное издание

Фуфаева Лидия Ивановна

Электротехника

Учебник

5-е издание, стереотипное

Редактор *Е. А. Балько*. Технический редактор *О. Н. Крайнова*

Компьютерная верстка: *Е. Ю. Назарова*. Корректоры *И. В. Могилевец*,
Т. С. Власкина

Изд. № 705213490. Подписано в печать 19.04.2016. Формат 60 × 90/16.
Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 24,0.

ООО «Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru
129085, Москва, пр-т Мира, 101В, стр. 1.

Тел./факс: (495) 648-0507, 616-00-29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение № РОСС RU. АЕ51. Н 16679 от 25.05.2015.